Cours de macroéconomie
Consommation, investissement et marchés financiers
Master APE 2006

Alexis Direr (courriel : 'nom'@ens.fr)
http://www.jourdan.ens.fr/~adirer/

December 11, 2009

Contents

Ces notes de cours ont constitué le support d'un cours dispensé aux étudiants du Master APE en 2005-6. Le matériel ci-dessous est destiné à circuler librement. La reprise de parties significatives du cours doit s'accompagner d'une référence appropriée.

1 Méthodologie

1.1 Deux approches

1. L'approche axiomatique avec des fondements ex ante sur la base d'**axiomes** (choix rationnels, cohérence des choix (ex: transitivité), ... = restrictions a priori sur l'espace des choix).
2. L'approche hypothético-déductive, avec une validation ex post par les faits (Friedman): on pose un environnement, des préférences et un comportement, on en tire des implications testables. Les deux approches employées seules montrent certaines limites.

En pratique, on utilise la plupart du temps une combinaison des deux.

1.2 Rappels: le cadre comptable

1.2.1 Les identités fondamentales

- Égalité 1: Y : revenu national, Q : production totale

$$Y = Q$$

- Égalité 2: l'équilibre ressources-emplois (ERE):

$$Q + M = C + I_e + I_m + I_p + G + X$$

Ressources : somme des productions de l'économie (privée et publique) + importations $= Q + M$

Emplois finals : consommation, investissement des entreprises, des ménages et de l'Etat, dépenses publiques, exportations $= C + I_e + I_m + I_p + G + X$

1.2.2 Les secteurs institutionnels

Quatre secteurs dans l'économie: les ménages, les entreprises, le secteur public et « le reste du monde ».

La contrainte budgétaire des ménages:

$$Y - A - T = C + S$$

avec A : autofinancement des entreprises (accumulation de fonds propres),

$Y - A$: le revenu réellement versé par les entreprises aux ménages,
T : les impôts, $Y - A - T$: revenu disponible
C : la consommation et S l'épargne.

1.2.3 L'équilibre sur le marché financier

Partons de l'ERE, et remplaçons la production par le revenu national et la consommation par son expression dans le budget des ménages. Après réarrangement:

$$(I_m - S) + (I_e - A) + (I_p + G - T) + (X - M) = 0$$

On obtient l'équilibre sur le marché financier en terme de besoins de financement (+) ou de capacités de financement (-).

Graphiques: les flux par secteurs sur le marché financier

Part I
1ère partie: la consommation

2 Introduction

2.1 Pourquoi étudier la consommation

- Environ 80% des ressources:

année	PIB (mds euros)	Q	M	C	I	X
2000	1441	100	27,3	78	20,8	28,5
2004	1648	100	29	80	19,2	26

=> composante principale de la demande effective. Fort impact sur le cycle économique. D'où l'importance de comprendre ses déterminants.

- Enjeux théoriques importants. Keynes lance le débat en postulant un lien stable entre le revenu courant et la consommation. Contesté par la suite par Friedman et d'autres. Quel est le lien avec le revenu courant ? Avec la richesse ou le revenu permanent ?

- Les déterminants du taux d'épargne : variables démographiques (pyramide des âges, espérance de vie, ratio de dépendance, ...), variables financières (taux de rendement, crédits, richesse), variables réelles ou nominales (inflation, taux de chômage, revenu). Poids de chaque variable ?

- Enjeux de politique économique: 1/ les politiques de relance keynésienne fonde leur réussite sur une sensibilité importante de la consommation sur le revenu courant. 2/ Impact des réformes structurelles sur le taux d'épargne (exemples: réforme des retraites, effets du déficit budgétaire sur l'épargne des ménages (Barro), impact des politiques fiscales sur l'épargne et les inégalités de patrimoine)

2.2 Pourquoi les agents épargnent ?

Nous pouvons détailler les motifs à l'aide de Keynes qui énonce 8 motifs économiques ou psychologiques en 1936:

- "*To build a reserve against unforeseen contengencies*" : se prémunir contre les aléas futurs (motif de précaution).
- "*To provide for an unticipated future relationship between the income and the needs of the individual*" (le motif de lissage de la consommation).
- "*To enjoy interest and appreciation*" (le motif de substitution intertemporel)
- "*To secure a* masse de manoeuvre *to carry out speculative or business projects*" (le motif d'investissement)
- "*To enjoy a gradually increasing expenditure*" (le motif d'amélioration du niveau de vie)
- "*To bequeath a fortune*" (le motif de legs)

Dans les théories standards de la consommation, l'épargne ou la richesse ne sont pas des biens valorisés en soi mais servent à financer la consommation future. Keynes note également des motifs contraires:

- "*To enjoy a sense of independence and the power to do things, though without a clear idea or definite intention of specific action*" (motif d'indépendance ou de pouvoir)
- "*To satisfy pure miserliness, i.e., unreasonable but insistent inhibitions against acts of expenditure as such*" (le motif d'avarice)

3 Quelques faits

3.1 Les comparaisons internationales de taux d'épargne

EU, Japon, EU (cf. graphiques) ...

3.2 Les premiers faits stylisés sur la consommation

La relation revenu-consommation **en coupe instantanée**: relation **affine**

La relation revenu-consommation sur séries chronologiques : relation **linéaire** (Kuznets (1942))

4 Premières théories de la consommation

4.1 La fonction de consommation keynésienne

La loi psychologique fondamentale:

"(...) en moyenne et la plupart du temps, les hommes tendent à accroître leur consommation à mesure que leur revenu croît, mais non d'une quantité aussi grande que l'accroissement du revenu. En d'autres termes, C étant le montant de la consommation et Y celui du revenu (...), ΔC est de même signe que ΔY mais d'une grandeur moindre i.e. $\Delta C/\Delta Y$ est positif et inférieur à l'unité" (Keynes, Théorie Générale p114).

4.1.1 Implications

$$C = a + bY$$

avec $\Delta C/\Delta Y = b$ "positif et inférieur à l'unité". En d'autres termes, la propension marginale à consommer le revenu est inférieure à 1

Deux difficultés empiriques:

- la relation n'est pas stable
- postulat incohérent avec les données chronologiques entre consommation et revenu.

Comment modifier la théorie afin de concilier mesures en coupe, à court-terme et à long-terme ?

4.2 La théorie du cycle de vie de Modigliani-Brumberg (1953)

Contrairement à Keynes, l'épargne n'est plus un résidu mais représente explicitement une consommation différée dans le temps. L'idée de cycle de vie est que les individus établissent un plan de consommation sur l'ensemble de leur vie.

Explique l'ensemble des **faits stylisés** précédents. En raison d'une volonté de lissage sur le cycle de vie, la consommation baisse moins que le revenu quand ce dernier est faible (aux deux extrêmes de la vie). Inversement, pendant la période à fort revenu, la consommation s'accroît moins vite pour financer le surcroît de consommation aux autres périodes

Explique la relation chronologique entre consommation et revenu car à chaque période on agrège des jeunes et des vieux => on trouve bien la linéarité.

Explique également la mesure en coupe (cela dit, les inégalités de revenu sur le cycle de revenu n'expliquent que très partiellement les inégalités de revenu totales).

Conséquence du modèle: le taux d'épargne agrégé est nul si les ménages ont consommé entièrement leur revenu de cycle de vie à la fin de leur existence. Il devient positif en cas de croissance démographique et de croissance économique.

L'évolution du taux d'épargne dépend par conséquent des évolutions de la structure démographiques: part relative des générations à forte capacité d'épargne (*prime savers*) dans la population totale et distribution des gains de la croissance entre les cohortes.

4.3 La théorie du revenu permanent de Friedman (1957)

Offre une explication complémentaire. Un individu qui souhaite lisser sa consommation ne devrait réagir qu'aux variations permanentes du revenu et ignorer les variations transitoires. Décomposons le revenu courant en deux composantes:

$$Y = Y^p + Y^T$$

avec $E(Y^T) = 0$ et $Cov(Y^p, Y^T) = 0$. A court-terme, une partie des hausses et des baisses du revenu courant sont transitoires. La consommation ne réagit qu'à la partie permanente:

$$C = Y^p$$

La partie transitoire n'influence pas la consommation => relation affine. A long-terme, les variations transitoires se compensent et les variations du revenu de long-terme se reflètent intégralement dans celles de la consommation => relation linéaire.

Formalisation simple de l'argument Régressons la consommation sur le revenu courant:

$$C_i = a + bY_i + e_i$$

avec Y_i le revenu courant. C'est une relation économétrique observée en coupe. La vraie relation inobservée est $C_i = Y_i^p$.

$$\begin{aligned} \widehat{b} &= \frac{Cov(Y, C)}{V(Y)} \\ &= \frac{Cov(Y^p + Y^T, Y^p)}{V(Y^p + Y^T)} \\ &= \frac{V(Y^p)}{V(Y^p) + V(Y^T)} < 1 \end{aligned}$$

La pente observée entre la consommation et le revenu courant est inférieure à l'unité: le consommateur lisse la consommation en ne tenant pas compte des variations transitoires du revenu. **Plus la variance du revenu transitoire** est importante par rapport à celle du revenu permanent, plus le coefficient est faible et **plus la consommation est lissée** et se déconnecte des mouvements du revenu.

Par ailleurs, les inégalités de revenu permanent se reflètent dans une translation verticale de la droite:

$$
\begin{aligned}
\widehat{a} &= \overline{C} - \widehat{b}\overline{Y} \\
&= \overline{Y^p} - \widehat{b}\overline{Y^p} \\
&= (1-\widehat{b})\overline{Y^p} > 0
\end{aligned}
$$

Différence entre les deux théories: l'horizon est à plus long-terme chez Modigliani-Brumberg (revenus à différents points du cycle de vie) et à plus court-terme pour la théorie de Friedman (risques de revenu comme le chômage, la maladie, etc ...).

Mais les deux théories exploitent fondamentalement la même idée. Une conséquence commune des deux théories est qu'il n'existe pas de relation stable entre la consommation et le revenu courant.

4.4 Formalisation des arguments de Modigliani-Brumberg et de Friedman

Les deux arguments peuvent être formalisés dans un modèle unique dans lequel les individus maximisent l'espérance de la somme actualisée des utilités futures:

$$U = E_t\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t)\right]$$

Avantage de fournir un cadre de base commun à toutes les discussions qui vont suivre sur les motifs d'épargne. C'est un modèle étendu du modèle simple microéconomique à deux biens datés 0 et 1:

$$U = u(c_0) + \beta u(c_1)$$

Les deux extensions sont l'introduction d'un horizon plus long et de l'incertitude. Permet de faire le pont entre les théories microéconomiques et macroéconomiques de la consommation. On commence par des théories partielles mais simples qui traitent un seul aspect d'une décision complexe.

5 Modéliser les préférences : consommation et incertitude

La prise en compte de l'incertitude pose des problèmes de méthodologie importants. Comment modéliser les choix dans l'incertain. La stratégie dominante (au moins depuis le paradoxe de Saint-Pétersbourg (1738)) est de réfléchir dans un cadre qui mêle intuition et parcimonie: l'espérance d'utilité.

5.1 L'espérance d'utilité

5.1.1 Restrictions sur les choix

Notons $y = (x_1, p_1; x_2, p_2; ...; x_n, p_n)$ une loterie quelconque avec $\sum p_i = 1$. Un individu est caractérisé par des préférences VNM (von Neuman & Morgenstern (1947)) si ses préférences sur l'espace des loteries satisfont les axiomes de (outre l'axiome de continuité):

- complétude: $y \succeq y'$ ou $y' \preceq y$ ($\succeq$ est une relation complète)
- réflexivité: $y \succeq y$
- transitivité: $y \succeq y'$ et $y' \succeq y''$ alors $y \succeq y''$
- et indépendance: $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$y \succeq y' \Leftrightarrow \alpha y + (1 - \alpha) y'' \succeq \alpha y' + (1 - \alpha) y'',$$

avec αy une loterie composée qui donne accès à la loterie y avec la probabilité α.

Selon cet axiome, l'individu classe les deux loteries composées de la même manière que les deux loteries simples. L'introduction d'une troisième loterie combinée dans les mêmes proportions ne doit pas modifier les préférences concernant les deux premières loteries.

Cette propriété est spécifique aus préférences sur les loteries. Il n'est pas vrai que cette propriété s'étend au cas sans risque en raison des complémentarité ou des substituabilités entre les biens (par exemple la préférence entre un téléviseur et une chaîne hi-fi peut être modifiée par l'introduction des oeuves complètes des Rolling Stones).

L'axiome d'indépendance a toutefois été critiquée par Allais (http://fr.wikipedia.org/wiki/Maurice_Allais) et son fameux paradoxe.

5.1.2 Implications: l'espérance d'utilité

Proposition. Soit une relation de préférence $\succeq$ caractérisée par les quatre axiomes VNM. Il existe une fonction d'utilité notée $u(.)$ telle que $\forall y = (x_1, p_1; x_2, p_2; ...; x_n, p_n)$ et $\forall y' = (x'_1, p'_1; x'_2, p'_2; ...; x'_m, p'_m)$:

$$y \succeq y' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{m} p'_i u(x'_i)$$

Démonstration. Voir Mas-Collel, Whinston et Green "Microeconomic Theory, 1995 pour une démonstration graphique.

Une fois admis le cadre de l'espérance d'utilité nous pouvons introduire un certain nombre de concepts tels que l'aversion pour le risque ou la prudence qui vont nous permettre de répondre aux questions suivantes: Comment le profil de consommation est-il affecté par l'incertitude ? Peut-on rendre compte d'une épargne de précaution ?

5.2 L'aversion pour le risque

Qu'entend-on par averse au risque ? De façon informelle, un individu est averse au risque s'il préfère la moyenne $\overline{X}$ à la loterie X qui génère cette moyenne.

5.2.1 Restrictions sur les choix

Choix entre deux loteries avec w la richesse et ε un aléa de moyenne nulle:

$$\left[\begin{array}{rc} A: & w \\ B: & w+\varepsilon \end{array}\right.$$

Définition. L'aversion pour le risque. Un individu est (systématiquement) averse au risque s'il préfère A à B quel que soit ε et quel que soit w.

5.2.2 Implications

Proposition. Dans le cadre de l'espérance d'utilité, si les préférences sont représentées par la fonction $u(.)$ alors un individu est (systématiquement) averse au risque si $u(.)$ est (globalement) concave.

Démonstration. $A \succ B \Rightarrow u(w) = u[E(w+\varepsilon)] > E[u(w+\varepsilon)]$ ssi u est concave (rappel de l'inégalité de Jensen: f concave, alors $f(E(X)) > E(f(X))$, f convexe, inverse).

5.3 Classer par degré d'aversion pour le risque (Arrow-Pratt)

Comment classer les individus selon leur degré d'aversion pour le risque? L'aversion pour le risque diminue-t-elle avec la richesse ?

5.3.1 Restrictions sur les choix

Un individu est plus averse au risque s'il est disposé à dépenser une somme supérieure pour se débarrasser d'un risque donné. Nous devons d'abord présenter la notion de prime de risque.

Définition. La prime de risque π est telle qu'un individu est indifférent entre les loteries A et B avec ε un aléa de moyenne nulle:

$$\left[\begin{array}{rc} A: & w-\pi \\ B: & w+\varepsilon \end{array}\right.$$

Le montant π est donc la somme d'argent qui compense un individu prenant un risque ϵ.

Définition. Degré d'aversion entre deux individus. Paul est (localement) plus averse au risque que Pierre si pour ε ("petit") et w communs, la prime de risque de Paul est supérieure à celle de Pierre.

De même pour un seul individu mais pour des montants de richesses différents:

Définition. Degré d'aversion entre deux niveaux de richesse. Paul est (localement) plus averse au risque doté de w que doté de $w + k$ si pour ε ("petit"), la prime de risque est supérieure dans le premier cas.

5.3.2 Implications

Dans le cadre de l'espérance d'utilité, si les préférences sont représentées par la fonction $u(.)$ alors la prime de risque est déterminée par l'égalité:

$$u(w - \pi) = E[u(w + \varepsilon)] \tag{1}$$

Proposition. Dans le cadre de l'espérance d'utilité, le degré d'aversion pour le risque s'exprime par:

$$\frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

Démonstration. π est défini par l'égalité $u(w - \pi) = E[u(w + \varepsilon)]$. Notons σ l'écart-type de l'aléa supposé "petit" et prenons un développement de Taylor des deux côtés de l'équation (linéarisation autour de w):

$$\begin{aligned} u(w - \pi) &\simeq u(w) - \pi u'(w) \\ E[u(w + \varepsilon)] &\simeq E[u(w) + \varepsilon u'(w) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u''(w)] \\ &= u(w) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w) \end{aligned}$$

Egalisation:

$$u(w) - \pi u'(w) \simeq u(w) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w)$$

D'où la relation entre la prime de risque et la fonction d'utilité:

$$\pi \simeq \frac{\sigma^2}{2} \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

Ainsi, si les préférences de Paul sont représentées par la fonction $u(.)$ et celle de Pierre par $v(.)$, alors Paul est (localement) plus averse au risque que Pierre si pour w donné:

$$\frac{-u''(w)}{u'(w)} > \frac{-v''(w)}{v'(w)}$$

De la même manière, le degré d'aversion risque décroît avec la richesse pour un même individu si pour $k > 0$:

$$\frac{-u''(w + k)}{u'(w + k)} < \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

En accord avec ce résultat, Pratt (1964) note le degré d'aversion **absolue** au risque:

$$r(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)} \Rightarrow \pi \simeq \frac{\sigma^2}{2} r(w)$$

qui est (approximativement) proportionnel à la prime de risque. Les fonctions d'utilité satisfaisant $r(w)$ *constant* quel que soit w sont dites **CARA** (*constant absolute risk aversion*): $r(w) = \overline{r}$. Dans ce cas, la prime est constante par rapport à la richesse.

En pratique, le degré d'aversion tend à *décroître* avec la richesse, ce qui est incohérent avec les fonctions CARA. Pratt (1964) définit également le coefficient d'aversion *relative* face au risque:

$$r^*(w) = r(w)w$$

ainsi qu'une seconde classe de fonctions: les CRRA (*constant relative risk aversion*) caractérisée par:

$$r^*(w) = \overline{r}^*$$

Par définition, les fonctions CRRA satisfont $r^*(w)$ constant quel que soit w.

Par construction: $r(w)w = \overline{r}^* \Rightarrow r(w) = \overline{r}^*/w$: le degré d'aversion *absolu* face au risque décroît *linéairement* avec la richesse.

Les CRRA ont donc un indice *relatif* constant par rapport à la richesse (simplicité d'emploi) tout en ayant un indice *absolu* décroissant avec la richesse (réalisme).

Exemple de fonction CRRA, la fonction puissance:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{si } \alpha \neq 1 \\ \log(c) \text{ si } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha > 0$$

$$r^*(w) = \alpha$$

Plus α est élevé et plus l'agent est averse (en relatif) au risque au sens de Pratt.

5.3.3 Remarque

L'indice d'aversion pour le risque vaut pour des "petits" risques, d'où la notion d'aversion *locale* face au risque ("*risk aversion in the small*" selon Pratt).

Pratt (1964) montre que si Paul est **localement** plus averse au risque que Pierre **pour tout niveau de richesse** (sa prime de risque est plus élevée, ou encore $r(w)$ supérieur $\forall w$), alors sa prime de risque sera également plus élevée quelle que soit la taille du risque ("*risk aversion in the large*").

5.4 La prudence

Comment un consommateur réagit face à un accroissement du risque? A-t-il tendance en réaction à accroître son épargne ou à la diminuer ? Dans le premier cas, nous parlerons d'individu prudent et d'épargne de précaution. Comme nous allons le voir, la notion de prudence est distincte de la notion d'aversion pour le risque.

5.4.1 Restrictions sur les choix

Soit la loterie suivante:

$$\left[\begin{array}{cc} w & (1/2) \\ w+\varepsilon & (1/2) \end{array}\right.$$

Avant de jouer la loterie, l'individu apprend qu'il doit perdre k avec la probabilité 1/2. Dans quelle situation préfère-t-il perdre cette somme? En d'autres termes, il doit choisir entre les deux loteries suivantes:

$$A : \left[\begin{array}{cc} w-k & (1/2) \\ w+\varepsilon & (1/2) \end{array}\right.$$

ou

$$B : \left[\begin{array}{cc} w & (1/2) \\ w+\varepsilon-k & (1/2) \end{array}\right.$$

Définition. La prudence. Un individu averse au risque est prudent[1] s'il préfère A à B quel que soit $k > 0$, ε et w [2].

Intuitivement, si un individu préfère la loterie A à la loterie B, il préférera consommer moins en première période (premier état de la loterie A) pour amortir le choc en seconde période (second état de la loterie A). Ce point est démontré *infra*.

5.4.2 Implications

Proposition. Dans le cadre de l'espérance d'utilité, si les préférences sont représentées par la fonction $u(.)$ alors un individu averse au risque est prudent si l'utilité marginale est convexe: $u'''(.) > 0$.

Démonstration. Définissons la fonction $v(w)$ représentant la perte d'utilité provenant de l'exposition au risque ε:

$$v(w) = u(w) - E[u(w+\varepsilon)]$$

$v(w)$ s'interprète également comme la "prime d'utilité" réclamée par l'individu pour supporter le risque ε. Considérons la proposition suivante : la prime d'utilité décroît avec la richesse. Dans ce cas:

$$v'(w) = u'(w) - E[u'(w+\varepsilon)] < 0$$
$$\text{ou } u'(E[w+\varepsilon]) - E[u'(w+\varepsilon)] < 0$$

si $u'(w)$ est convexe ou encore si $u'''(.) > 0$ (Jensen). Si $v(.)$ est décroissant:

$$v(w-k) > v(w)$$

[1] Kimball, Miles S. (1990) "Precautionary Saving in the Small and in the Large." Econometrica 58, no. 1: 53-73.

[2] Eeckhoudt L. & H. Schlesinger (2003) "Putting Risk in its Proper Place" mimeo.

autrement dit:

$$u(w-k) - E[u(w-k+\varepsilon)] > u(w) - E[u(w+\varepsilon)]$$

$$\begin{aligned} u(w-k) + E[u(w+\varepsilon)] &> u(w) + E[u(w-k+\varepsilon)] \\ \frac{1}{2}u(w-k) + \frac{1}{2}E[u(w+\varepsilon)]\frac{1}{2} &> u(w) + \frac{1}{2}E[u(w-k+\varepsilon)] \end{aligned}$$

$$A \succ B$$

[Intuitivement, un risque donné disperse d'autant plus les utilités marginales entre les états que l'utilité marginale est convexe. Supporter un risque donné est donc plus coûteux pour un individu averse au risque (la perte d'utilité marginale croît quand la richesse décroît) que sa richesse est déjà faible.]

5.5 Le plan de consommation dans un cadre incertain

Ce que nous savons (par ordre décroissant de degré de confiance):

- les agents sont averses au risque (traduction mathématique : $u'' < 0$)
- prudents ($u''' > 0$) (ou de façon équivalente la *prime d'utilité* décroît avec la richesse)
- d'autant plus averses que leur richesse est faible ($r'(w) < 0$ ou encore $u''' > (u'')^2/u'$) (ou de façon équivalente la *prime monétaire* décroît avec la richesse)

Remarquons que la décroissance de l'aversion absolue au risque en fonction de la richesse (propriété 3) est une condition plus forte que la condition de prudence: un individu dont l'aversion décroît avec la richesse est nécessairement prudent.

La demande d'assurance Nous pouvons maintenant analyser la décision de consommation en incertitude. Prenons une période incluant un risque de revenu: $y^A < y^B$. L'utilité du consommateur est:

$$U = E[u(c)] = \pi u(c^A) + (1-\pi)u(c^B)$$

On suppose que l'agent passe un contrat avec un tiers neutre face au risque (assureur). La contrainte budgétaire est dans ce contrat contingente à l'état de la nature qui se réalise:

$$\begin{gathered} \text{état A} : c^A = y^A + T \text{ (transfert positif)} \\ \text{état B} : c^B = y^B + P \text{ (prime)} \end{gathered}$$

Interprétation en terme d'assurance: T = remboursement du sinistre > 0 et P = prime < 0. En l'absence de coûts de gestion ou de pouvoir de marché, l'assureur fait un profit nul en moyenne:

$$\pi T + (1-\pi)P = 0$$

On pose le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \pi u(y^A + T) + (1-\pi)u(y^B + P) + \lambda\left(\pi T + (1-\pi)P\right)$$

CPO:

$$u'(c^A) = u'(c^B)$$

=> la consommation est parfaitement égalisée entre les états de la nature dès lors que l'individu est averse au risque ($u''(c) < 0$) et ceci quel que soit son degré d'aversion pour le risque.

5.5.1 Le risque résiduel

En pratique, malgré une demande d'assurance complète, les individus ne peuvent pas s'assurer intégralement contre les risques de consommation pour plusieurs raisons:

1/ La présence de risque agrégé. Les risques de revenu ne sont pas parfaitement mutualisables.

2/ La présence d'un taux de chargement de l'assureur pour financer ses coûts

3/ une concurrence imparfaite sur le marché de l'assurance

4/ La présence d'imperfections de marché (comme le risque moral) gênant l'assurance parfaite.

Il existe par conséquent de multiples raisons pour lesquelles l'assurance des risques ne sera que partielle. L'individu dispose toutefois d'un moyen subsidiaire pour réduire le risque de consommation: l'épargne de précaution qui permet en quelque sorte de s'auto-assurer.

5.6 L'épargne de précaution

Nous avons appelé un agent prudent, un agent:

- qui préfère la loterie A à la loterie B définies *supra*,
- dont la prime d'utilité nécessaire pour le compenser d'un risque décroît avec la richesse,
- dont les préférences sont représentées par $u'(.)$ est convexe,
- qui accroît son épargne en présence de risque futur (épargne de précaution).

Nous avons simplement suggéré le quatrième point. Nous allons le montrer dans la suite. Prenons cette fois deux périodes, la seconde période incluant un risque de revenu: $\widetilde{y}_2 = y_2 + \varepsilon$. L'utilité du consommateur est:

$$U = u(c_1) + \beta E[u(c_2)]$$

On suppose que l'agent ne peut pas passer de contrats avec un assureur. La seule façon d'amortir le risque de seconde période est (éventuellement) d'épargner plus. Les contraintes budgétaires par période sont

$$\begin{array}{r}\text{période 1 : } c_1 = y_1 - a \\ \text{période 2 : } c_2 = Ra + y_2 + \varepsilon\end{array}$$

Maximisation de l'objectif:

$$\max_a u(y_1 - a) + \beta E[u(Ra + y_2 + \varepsilon)]$$

CPO:

$$u'(y_1 - a) = \beta R E[u'(Ra + y_2 + \varepsilon)]$$

Pour mettre en évidence la présence d'épargne de précaution, supposons que le risque disparaît et notons a^* l'épargne associée.

Définition. L'épargne de précaution. La différence $a - a^*$, si elle est positive, représente l'épargne de précaution.

Proposition. Si un individu averse au risque est prudent, alors l'incertitude est un motif d'épargne ($a - a^* > 0$).

Démonstration. Il suffit de comparer les espérances d'utilité marginale de seconde période. En effet, a et a^* sont définis respectivement par (condition d'Euler):

$$\begin{cases} u'(y_1 - a) = \beta R E[u'(Ra + y_2 + \varepsilon)] \\ u'(y_1 - a^*) = \beta R u'(Ra^* + y_2) \end{cases}$$

En reprenant la définition de la prudence, l'agent est prudent si sa prime d'utilité $v(.)$ décroît avec la richesse (ou ce qui revient au même si $u'(.)$ est convexe):

$$v'(Ra + y_2) = u'(Ra + y_2) - E[u'(Ra + y_2 + \varepsilon)] < 0.$$

Par conséquent, l'utilité marginale de la consommation de seconde période est plus élevée en présence de risque et l'agent épargne plus dans ce cas: $a > a^*$.

L'attrait de la consommation de seconde période est plus forte avec incertitude. Le consommateur rétablit l'égalité des utilités marginales entre les deux périodes en épargnant plus dans le cas avec incertitude.

6 Modéliser les préférences: la consommation au cours du temps

Comment le consommateur alloue sa consommation au cours du temps ?

6.1 Le profil temporel de la consommation sans incertitude

6.1.1 Restrictions sur les choix

Soit un individu dont la relation de préférence sur les paniers de consommation $C = (c_0, c_1, ..., c_T)$ satisfait les axiomes (outre de continuité) de:

- complétude: $C \succeq C'$ ou $C' \succeq C$
- réflexivité: $C \succeq C$
- transitivité: $C \succeq C'$ et $C' \succeq C''$ alors $C \succeq C''$

6.1.2 Implications

Proposition. Sous les hypothèses de complétude, de réflexivité, de transitivité et d'indépendance des choix, il existe une **fonction** d'utilité $U(.)$ qui satisfait: $C \succeq C' \Leftrightarrow U(C) > U(C')$

Démonstration. Voir le Mas Collel ou le Varian p.97

6.2 La séparabilité par rapport au temps

Le critère de choix précédent reste complexe à manipuler. Ainsi, l'utilité marginale de la consommation d'une période:

$$\frac{\partial U}{\partial c_t}(c_0, ..., c_t, ..., c_T)$$

dépend des niveaux de consommation de toutes les autres périodes. La restriction suivante permet de simplifier de façon raisonnable le problème du choix en obtenant la séparabilité des utilités marginales entre les périodes.

6.2.1 Restrictions sur les choix

Outre les axiomes précités, la relation de préférence de l'individu sur les paniers de consommation $C = (c_0, c_1, ..., c_T)$ satisfait l'axiome supplémentaire d'indépendance:

$$\forall \alpha \in [0,1], C \succeq C' \Leftrightarrow \alpha C + (1-\alpha)C'' \succeq \alpha C' + (1-\alpha)C''$$

avec $\alpha C + (1-\alpha)C''$ un panier composé qui délivre une combinaison convexe des paniers C et C'':

$$\alpha C + (1-\alpha)C'' = (\alpha c_0 + (1-\alpha)c_0'', \alpha c_1 + (1-\alpha)c_1'', ..., \alpha c_T + (1-\alpha)c_T'')$$

Selon cet axiome, l'individu classe les deux paniers composés de la même manière que les deux paniers simples. Dit autrement, la combinaison dans les mêmes proportions d'un troisième panier ne doit pas modifier ses préférences concernant les deux première paniers.

Exemple contraire: la formation d'habitude.

$$\begin{aligned} C &= (4;3) \\ C' &= (2;4) \\ \text{avec } C &\succeq C' \end{aligned}$$

Ajoutons $C'' = (2,0)$ et $\alpha = 1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C'' &= (3;1,5) \\ \frac{1}{2}C' + \frac{1}{2}C'' &= (2;2) \\ \text{avec } \frac{1}{2}C' + \frac{1}{2}C'' &\succeq \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C'' \end{aligned}$$

car la consommation chute maintenant plus fortement. La formation d'habitude peut renverser les préférences si nous concentrons de la consommation en première période. Les individus préfèrent alors un niveau de vie en moyenne plus faible mais qui ne chute pas.

6.2.2 Implications

L'axiome d'indépendance implique la séparabilité temporelle:

Proposition. Soit une relation de préférence $\succeq$ caractérisée par les axiomes de complétude, réflexivité, transitivité et d'indépendance. Etant donnés les poids $\{p(t)\}$ il existe une **fonction** d'utilité notée $u(.)$ qui satisfait:

$$C \succeq C' \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} p(t)u(c_t) \geq \sum_{t=0}^{T} p(t)u(c_t')$$

Démonstration. Voir le livre de microéconomie de Mas Collel pour une démonstration graphique dans le cas de l'espérance d'utilité.

Les poids $p(t)$ sont attachés à l'utilité de chaque période et dépendent de la durée s'écoulant jusqu'à la date t (la date 0 représentant le présent). Ils permettent de distinguer l'attitude vis à vis de la consommation future de l'utilité intrinsèque.

Exemple de fonction d'utilité rompant la séparabilité temporelle:

$$U = \sum_{t=0}^{T} p(t)u(c_t - \lambda c_{t-1})$$

$\lambda > 0 \Rightarrow$ formation d'habitude.

La préférence pour le présent se définit naturellement dans ce cadre:

Définition. La préférence pour le présent. Un individu avec utilité séparable par rapport au temps préfère la consommation présente à la consommation future si: $p(t) > p(s)\ \forall t < s$.

Le phénomène de préférence pour le présent revient à actualiser les flux d'utilités futures. On parle d'actualisation subjective.

6.3 Actualisation subjective exponentielle

Une seconde restriction sur les choix a priori possibles est introduite, simplifiant encore un peu plus la représentation des préférences.

6.3.1 Restriction sur les choix

Définition. La cohérence temporelle. Un individu est cohérent temporellement si le profil optimal de consommation ne se modifie pas en l'absence d'incertitude sur le futur:

$$(c_0, c_1, ..., c_s, ..., c_T) \succeq (c_0', c_1', ..., c_s', ..., c_T') \Rightarrow (c_s, ..., c_T) \succeq (c_s', ..., c_T') \; \forall s = 1, ..., T$$

Image du plus court chemin pour se rendre d'un point à un autre dans Paris: le trajet optimal ne change pas en cours de route (cf. principe de Bellman).

6.3.2 Implication

Proposition. Supposons que l'individu ait une relation de préférence $\succeq$ caractérisée par les axiomes de complétude, réflexivité, transitivité et indépendance et que de plus, il fasse des choix temporellement cohérents. Alors, le facteur d'actualisation subjective doit être de **forme exponentielle** en fonction du temps:

$$p(t) = \beta^t \text{ à la date } 0$$

Démonstration. Notons $C[1] = (c_1, c_2, ..., c_T)$ et $C'[1] = (c_1', c_2', ..., c_T')$ deux paniers de consommation quelconques évalués à la date 1. Supposons que l'individu classe ces deux paniers de la manière suivante:

$$C[1] \succeq C'[1]$$

ou encore:

$$p(0)u(c_1)+p(1)u(c_2)+...p(T-1)u(c_T) > p(0)u(c_1')+p(1)u(c_2')+...p(T-1)u(c_T')$$

Pour que l'individu fasse des choix temporellement cohérents, il faut que la relation de préférence soit préservée une période avant. Notons $C[0] = (c_1, c_2, ..., c_T)$ et $C'[0] = (c_1', c_2', ..., c_T')$ les mêmes paniers mais évalués une période avant à la date 0. On doit avoir:

$$C[0] \succeq C'[0]$$

ou encore:

$$p(1)u(c_1) + p(2)u(c_2) + ...p(T)u(c_T) > p(1)u(c_1') + p(2)u(c_2') + ...p(T)u(c_T')$$

La relation de préférence reste inchangée une période avant si les poids sont égaux à un facteur multiplicatif près noté β:

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta p(0) = p(1) \\ \beta p(1) = p(2) \\ ... \\ \beta p(T-1) = p(T) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow p(T) = \beta p(T-1) = ... = \beta^{T-2}p(2) = \beta^{T-1}p(1) = \beta^T p(0)$$

Solution récursive:

$$p(t) = \beta p(t-1) \Rightarrow p(t) = \beta^t \text{ à la date } 0$$

La préférence pour le présent se définit alors encore plus simplement dans ce cas:

Définition. La préférence pour le présent avec actualisation exponentielle. Un individu préfère la consommation présente à la consommation future si: $\beta < 1$.

Une des leçons de la proposition précédente est que la cohérence temporelle implique une forte contrainte sur les préférences. A contrario, si nous pensons que les préférences ne sont pas temporellement cohérentes, il existe une infinité de modélisation du phénomène. Il existe toutefois des exemples assez intuitif d'incohérence temporelle.

6.3.3 Actualisation quasi-hyperbolique

Choix entre un petit gateau aujourd'hui ($t = 0$) apportant l'utilité u_s et un plus gros gateau dans une semaine ($t = 1$) apportant l'utilité u_b. Beaucoup de gens préfèrent le gateau aujourd'hui malgré $u_s < u_b$. De même avec la cigarette ou tous les biens à gratification immédiate.

Pour le moment, c'est la préférence classique pour le présent. Appelons $p(t)$ le facteur d'actualisation entre aujourd'hui et la date $0 + t$ semaines. On a:

$$p(0)u_s > p(1)u_b$$

En même temps, beaucoup de gens préfèrent le grand gateau une semaine après au petit gateau si l'horizon est plus lointain:

$$p(t+0)u_s < p(t+1)u_b$$

par exemple dans un an ($t = 54$). Par conséquent:

$$\frac{p(t+1)}{p(t+0)} > \frac{u_s}{u_b} > \frac{p(1)}{p(0)}$$

ce qui contredit le cas exponentiel $p(t) = \beta^t$:

$$\frac{\beta^{t+1}}{\beta^t} \not> \frac{\beta}{1}$$

Cet exemple montre que la présence d'incohérence temporelle milite pour un poids supérieur donné au futur proche. Exemple (Phelps et Pollack 1968, Laibson 1997):

$$p(t) = 1 \text{ pour } t = 0$$
$$p(t) = \delta\beta^t \ \forall t > 0$$

avec $\delta < 1$ et $\beta < 1$. La minoration disparaît progressivement à mesure que la distance augmente. Dans ce cas, l'exemple précédent donne:

$$\frac{\delta\beta^{t+1}}{\delta\beta^{t}} = \beta > \frac{u_s}{u_b} > \frac{\delta\beta}{1} = \delta\beta$$

Ce type de préférence donne un poids plus important à "demain" par rapport à "après-demain" => forte préférence pour le présent immédiat.

Quelle est l'unité temporelle ? Pour un gateau, cela peut être une heure, pour de l'argent à dépenser, cela peut être une semaine. Pour la consommation dans son ensemble, cela peut être un mois ou un trimestre. Certaines études empiriques montrent que $\delta \simeq 0,98$ sur une base annuelle.

6.4 La préférence pour lisser la consommation

6.4.1 Restriction sur les choix

Nous supposons que les consommateurs souhaitent un profil plat de consommation plutôt que des variations, c'est à dire préfèrent toujours le panier moyen à sa variation temporelle. Définissons le panier moyen relatif au panier quelconque $C = (c_0, c_1, ..., c_T)$:

$$\overline{C} = (\overline{c}, \overline{c}, ..., \overline{c}) \text{ avec } \overline{c} = \frac{1}{T+1}\sum_{i=0}^{T} c_i$$

Définition. La préférence pour lisser la consommation. Un individu préfère lisser sa consommation si $\overline{C} \succeq C$.

6.4.2 Implication

Proposition. Un individu préfère lisser la consommation si $u(.)$ est concave.

Démonstration. Utiliser Jensen comme dans le cas avec aversion pour le risque.

6.5 Le profil optimal de consommation sans incertitude

Utilité sur le cycle de vie:

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

Notation alternative du facteur d'actualisation:

$$U = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+\delta)^t} u(c_t)$$

où δ est le facteur d'actualisation *subjectif* comparable au taux d'intérêt réel. Il existe T contraintes budgétaires avec comme richesse initiale a_{-1} et R le facteur d'intérêt:

$$\begin{gathered}
c_0 + a_0 = Ra_{-1} + y_0 \\
c_1 + a_1 = Ra_0 + y_1 \\
\ldots \\
c_t + a_t = Ra_{t-1} + y_t \\
\ldots \\
c_T + a_T = Ra_{T-1} + y_T
\end{gathered}$$

avec un flux de revenus variables mais connu à l'avance. En l'absence de contraintes d'endettement (l'agent peut librement transférer du pouvoir d'achat d'une période à l'autre), le consommateur ne fait face qu'à **une seule** contrainte intertemporelle actualisée à la période 0 (après élimination des richesses intermédiaires Ra_t ligne par ligne):

$$c_0 + \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{R^2} + \ldots + \frac{c_T}{R^T} = Ra_{-1} + y_0 + \frac{y_1}{R} + \frac{y_2}{R^2} + \ldots + \frac{y_T}{R^T}$$

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t} = Ra_{-1} + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{R^t}$$

Si le marché financier est parfait, il existe une **déconnection complète** entre le profil optimal de la consommation et l'évolution (donnée) du revenu. Les deux profils obéissent à des logiques différentes: il n'y a pas de raisons ici, pour que l'évolution de la consommation épouse celle du revenu. On définit W_0 la richesse intertemporelle, somme du capital financier et du capital humain:

$$W_0 = Ra_{-1} + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{R^t}$$

Implication: toute redistribution du revenu qui maintient W_0 constant n'a pas d'effet sur le plan de consommation. Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) + \lambda \left(W_0 - \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{R^t} \right)$$

CPO:

$$u'(c_t) = \frac{\lambda}{(\beta R)^t} \ , \qquad t = 0, \ldots T$$

$$\Rightarrow \lambda = u'(c_t)(\beta R)^t = u'(c_{t+1})(\beta R)^{t+1}$$

$$u'(c_t) = \beta R u'(c_{t+1}) \tag{CPO}$$

La CSO est vérifiée si u est partout concave: $u''(c) < 0$. Raisonnement à la marge entre deux périodes de la CPO.

6.6 Interprétation

Comme le facteur λ est constant, nous voyons que:

- si $\beta R = 1$, ou encore $\frac{1+r}{1+\delta} = 1 => \delta = r$: l'utilité marginale est constante sur l'ensemble de la période => profil constant de consommation. La préférence pour le présent compense exactement l'attractivité de l'épargne => cas le plus simple dans le diagramme de Modigliani.
- si $\beta R > 1$, ou encore $\delta < r$: l'utilité marginale est décroissante sur l'ensemble de la période => profil croissant de consommation au cours du temps, car la préférence pour le présent ne compense pas l'attractivité de l'épargne.
- si $\beta R < 1$, ou encore $\delta > r$: l'utilité marginale est croissante sur l'ensemble de la période => profil décroissant de consommation.

Ces trois cas impliquent par conséquent une pente différente pour la consommation mais conduisent à des **prédictions similaires** : face à un cycle de revenu en forme de cloche, la consommation ne suit pas le revenu courant sur le cycle de vie. Ce résultat illustre parfaitement l'idée que le profil de consommation est disjoint de celui des revenus.

7 La dynamique de la consommation avec incertitude

7.1 Le modèle temporel avec incertitude

La consommation au cours du temps et avec incertitude sur les revenus futurs:

$$U = u(c_0) + E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) \right]$$

Maximisation de cette quantité sous la contrainte budgétaire intertemporelle:

$$Ra_{-1} + y_0 + E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{R^t} \right] = c_0 + E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{R^t} \right]$$

La somme actualisée des revenus doit être égale à la somme actualisée des consommations en espérance. Contrairement aux revenus, la consommation est la décision du consommateur. Elle est également incertaine car l'agent va modifier sa consommation en fonction des fluctuations du revenu. On pose le Lagrangien correspondant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= u(c_0) + E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u(c_t) \right] \\ &+\lambda \left\{ Ra_{-1} + y_0 + E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{R^t} \right] - c_0 - E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{R^t} \right] \right\} \end{aligned}$$

CPO:

$$(\beta R)^t E_t [u'(c_t)] = \lambda \ , \qquad t = 0, ...T$$

Le consommateur n'a pas à s'engager sur toute la chronique des consommations futures. Il doit simplement choisir combien il consomme aujourd'hui et laisse pour les périodes suivantes. Pour cela, il égalise l'utilité marginale de la consommation d'aujourd'hui (en t sachant que $E_t [u'(c_t)] = u'(c_t)$) avec celle de demain $(t+1)$.

$$u'(c_t) = \beta R E_t [u'(c_{t+1})] \tag{CPO}$$

Cette condition d'optimalité s'appelle la **condition d'Euler**. Pour comprendre pourquoi cette condition maximise l'utilité totale, supposons par l'absurde que:

$$u'(c_t) < \beta R E_t [u'(c_{t+1})]$$

Regardons l'effet d'une baisse marginale de la consommation aujourd'hui et d'une hausse demain satisfaisant la contrainte budgétaire:

bilan d'une baisse marginale de c_t:	coût présent	bénéfice
en terme de consommation en moins en t:	1	-
en terme d'utilité en t:	$u'(c_t)$	-
en terme de consommation en plus en $t+1$:	-	R
en terme d'utilité en $t+1$:	-	$RE_t [u'(c_{t+1})]$
gain d'utilité actualisé:	-	$\beta RE_t [u'(c_{t+1})]$

L'agent pourrait accroître son utilité totale en reportant à demain la consommation d'une unité de bien. Cette hausse de l'épargne va se poursuivre jusqu'à l'égalisation. L'égalisation aura lieu car plus de consommation demain réduit l'utilité marginale de cette période.

7.2 La dynamique de la consommation

Qu'implique ce modèle sur la dynamique de la consommation ? Prenons le cadre le plus simple possible: $\beta = R = 1$ et une fonction d'utilité quadratique:

$$u(c) = c - \frac{a}{2} c^2$$

Appliquons la condition d'Euler en incertitude:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= E_t [u'(c_{t+1})] \\ 1 - ac_t &= E_t [1 - ac_{t+1}] \\ c_t &= E_t [c_{t+1}] \qquad (2) \end{aligned}$$

La richesse intertemporelle s'écrit à la date 0:

$$E_0[W_0] = a_{-1} + y_0 + E_0\left[\sum_{t=1}^{T} y_t\right]$$

La contrainte budgétaire implique que la somme des revenus doit financer la somme des consommations:

$$c_0 + E_0\left[\sum_{t=1}^{T} c_t\right] = E_0[W_0]$$

- La condition d'Euler (2) nous dit que la consommation doit être constante au cours du temps en espérance.
- La condition budgétaire nous dit que la somme des consommations ne doit pas dépasser la richesse intertemporelle.
- La solution s'écrit donc à la date 0:

$$c_0 = E_0\left[c_1\right] = E_0\left[c_2\right] = ... = E_0\left[c_T\right] = \frac{1}{T+1} E_0[W_0]$$

Il existe maintenant **deux cas**:

- L'assurance est parfaite. Dans ce cas, le consommateur échange son flux de revenu incertain contre l'équivalent certain auprès d'un assureur (qui peut être une assurance publique via la sécurité sociale). Il s'assure dans ce cas une consommation certaine et constante, présente et future, qui maximise son bien-être:

$$c_0 = c_1 = ... = c_T = \frac{1}{T+1} E_0[W_0]$$

- L'assurance est imparfaite, ce qui constitue le cas général (voir la section sur l'assurance et pourquoi il est difficile de s'assurer complètement en pratique). Dans ce cas, la consommation va fluctuer en fonction des mises à jour de la richesse intertemporelle d'une période à l'autre:

$$\begin{array}{c} c_0 = \frac{1}{T+1} E_0[W_0] \\ c_1 = \frac{1}{T} E_1[W_1] \\ ... \\ c_{T-1} = \frac{1}{2} E_{T-1}[W_{T-1}] \\ c_T = W_T \end{array}$$

7.3 Le modèle de l'équivalent-certain

Le modèle précédent avec utilité quadratique et assurance incomplète fait dépendre la consommation de la richesse moyenne anticipée. La consommation est donc insensible à la chronologie particulière des flux de revenus qui génèrent la richesse intertemporelle. La consommation est la même que le revenu fluctue peu ou beaucoup.

Un modèle qui fait dépendre la consommation de l'équivalent certain de la richesse est appelé **le modèle de l'équivalent certain** (*Certainty Equivalence Model* ou modèle CEQ). La propriété de ce modèle est intimement lié à la présence ou non d'épargne de précaution. Si le consommateur est prudent, l'épargne va augmenter avec les fluctuations du revenu et le profile de consommation ne dépend pas que de l'équivalent certain de la richesse. Un tel résultat d'absence d'épargne de précaution provient de la fonction d'utilité qui est ici de forme quadratique:

$$u(c) = c - \frac{a}{2}c^2$$

Dans ce cas, $u' = -ac$, $u'' = -a$ et $u''' = 0$. Rappelons que le consommateur épargne par précaution si $u''' > 0$. A l'inverse, il "désépargnerait par précaution" si $u''' < 0$. Le cas quadratique implique par conséquent ni épargne ni "désépargne" de précaution.

7.4 Le modèle de marche aléatoire

Quelle dynamique pour la consommation ? Définissons e_{t+1} l'écart entre la prévision de c_{t+1} formée à la date t et sa réalisation. Cette erreur de prévision ex post s'écrit:

$$e_{t+1} = c_{t+1} - E_t\left[c_{t+1}\right]$$

On a donc:

$$e_{t+1} \overset{\text{DEF}}{=} c_{t+1} - E_t\left[c_{t+1}\right] \overset{\text{CPO}}{=} c_{t+1} - c_t$$

Par conséquent:

$$c_{t+1} = c_t + e_{t+1}$$

Propriétés statistiques de l'erreur:
Si les agents anticipent rationnellement la consommation future, alors:

- le sens de l'erreur devrait être imprévisible ex ante:

$$E_t[e_{t+1}] = 0$$

- le consommateur ne peut utiliser la direction de l'erreur passée pour prédire la direction de l'erreur future. En termes statistiques, les erreurs ne peuvent pas être temporellement corrélées:

$$Cov[e_t, e_{t+1}] = 0$$

Dans tous les autres cas, l'agent pourrait exploiter l'autocorrélation persistante pour "redresser" sa prévision dans un sens qui réduirait la marge d'erreur.

Dans ce cas, la consommation suit une **marche aléatoire**: les changements du plan de consommation ne sont pas prévisibles. Les consommations passées, ainsi que toute autre variable passée sont inutiles pour prévoir la consommation de demain. S'ils l'étaient, l'objectif de maintenir la consommation constante au cours du temps (CPO: $E_t[c_{t+1}] = c_t$) ne serait pas rempli.

Cette propriété de la consommation est une conséquence du désir de lisser la consommation en présence d'anticipations rationnelles[3]! Nous savons que la consommation varie moins que le revenu au cours du cycle économique. Cette propriété a été interprétée comme une action de lissage de la part des consommateurs. Une faible volatilité n'est toutefois pas incompatible avec une dynamique de marche aléatoire.

8 Tests du modèle de marche aléatoire

Le résultat que la consommation devrait suivre une marche aléatoire est une conséquence du modèle de revenu permanent dans lequel le consommateur s'efforce de maintenir constant son profil temporel de consommation. La consommation suit-elle une marche aléatoire? Ce résultat est la conséquence du modèle de revenu permanent (pas de myopie et marchés financiers parfaits), ajouté à l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Tester le modèle de marche aléatoire, c'est donc tester l'hypothèse jointe revenu permanent/anticipations rationnelles. Nous supposons également en première approximation l'absence de prudence (en raison de la forme quadratique de l'utilité), car le résultat de marche aléatoire est altéré en cas d'épargne de précaution.

8.1 Le test direct

Pas de résultats tranchés. Esquisse de l'argument: si on régresse la consommation sur sa valeur passée à l'aide d'une forme auto-régressive d'ordre 1:

$$c_{t+1} = \rho c_t + e_{t+1}$$

on peut tester l'hypothèse $\rho = 1$. Les résultats montrent un coefficient "proche de 1" mais ne rejettent pas l'hypothèse de racine unitaire. Quantitativement, il n'y a pas beaucoup de différences entre un coefficient égal à $0,98$ ou égal à 1. Qualitativement, cela fait pourtant une différence de taille sur le test du modèle.

[3] Robert E. Hall (Dec., 1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence", The Journal of Political Economy, Vol. 86, No. 6., pp. 971-987.

8.2 L'excès de lissage

En estimant une fonction temporelle de revenu, on peut estimer la part permanente de ces variations. Prenons comme loi de variation une loi de "retour à la moyenne":

$$y_t = (1-\rho)\overline{y} + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$, $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}] = 0$ et ρ un coefficient autorégressif entre $[0, 1]$. Si $\rho = 0$, l'innovation n'a qu'un effet purement transitoire et n'a aucune influence sur les revenus futurs. Si $\rho = 1$, les innovations "s'empilent" et ont des effets permanents sur le revenu ainsi que sur la consommation. On sait en effet que la consommation devrait réagir "intégralement" (terme à qualifier, voir la suite) aux variations non anticipées. En comparant la volatilité de la variation non anticipée du revenu et celle de la variation de la consommation, on dispose d'un test de l'hypothèse jointe revenu permanent/anticipations rationnelles.

Dans le cas $\beta R = 1$ et avec horizon de vie infinie, on peut montrer le résultat suivant (voir le TD):

$$\begin{aligned}\frac{R}{R-1}(c_t - c_{t-1}) &= y_t - E_{t-1}[y_t] \\ &\quad + \frac{1}{R}(E_t[y_{t+1}] - E_{t-1}[y_{t+1}]) \\ &\quad + \frac{1}{R^2}(E_t[y_{t+2}] - E_{t-1}[y_{t+2}]) \\ &\quad + ...\end{aligned}$$

ou sous forme ramassée:

$$c_t - c_{t-1} = \frac{R-1}{R}\left[\sum_{s=t}^{\infty} \frac{1}{R^{s-t}}(E_t[y_s] - E_{t-1}[y_s])\right]$$

La révision du plan de consommation dépend des informations nouvelles en t:

$$E_t[y_s] - E_{t-1}[y_s]$$

et de la façon dont ces informations modifient les prévisions de consommation. La dynamique de la consommation dépend par conséquent de la loi statistique suivie par le revenu. Partons de la date $s > t$ et développons y_s vers l'arrière jusqu'à la période t:

$$\begin{aligned}y_s &= (1-\rho)\overline{y} + \rho y_{s-1} + \varepsilon_s \\ &= (1-\rho)\overline{y} + \rho((1-\rho)\overline{y} + \rho y_{s-2} + \varepsilon_{s-1}) + \varepsilon_s \\ &= (1-\rho)(1+\rho)\overline{y} + \rho^2 y_{s-2} + \rho\varepsilon_{s-1} + \varepsilon_s \\ &= ... \\ &= (1-\rho)(1+\rho+\rho^2+...+\rho^{s-t-1})\overline{y} + \rho^{s-t} y_t + \rho^{s-t-1}\varepsilon_t + ... + \rho\varepsilon_{s-1} + \varepsilon_s\end{aligned}$$

Passons cette expression à l'opérateur d'espérance (en se rappelant que $E_t[\varepsilon_s] = 0$):

$$\begin{aligned} E_t[y_s] &= (1-\rho)(1+\rho+\rho^2+...+\rho^{s-t-1})\overline{y} + \rho^{s-t}y_t \\ E_{t-1}[y_s] &= (1-\rho)(1+\rho+\rho^2+...+\rho^{s-t-1}+\rho^{s-t})\overline{y} + \rho^{s-t+1}y_{t-1} \end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned} E_t[y_s] - E_{t-1}[y_s] &= -(1-\rho)\rho^{s-t}\overline{y} + \rho^{s-t}(y_t - \rho y_{t-1}) \\ &= -(1-\rho)\rho^{s-t}\overline{y} + \rho^{s-t}((1-\rho)\overline{y} + \varepsilon_t) \\ &= \rho^{s-t}\varepsilon_t \end{aligned}$$

La révision de l'anticipation dépend de l'information nouvelle ("l'innovation") pondérée par le coefficient d'autocorrélation et de son éloignement dans le temps. Plus le coefficient est élevé ou plus le revenu anticipé est proche dans le temps et plus la révision sera notable.

Une fois connue la dynamique de l'anticipation du revenu futur, nous pouvons étudier ses implications sur la dynamique de la consommation elle-même:

$$\begin{aligned} c_t - c_{t-1} &= \frac{R-1}{R}\left[\sum_{s=t}^{\infty}\frac{1}{R^{s-t}}(E_t[y_s] - E_{t-1}[y_s])\right] \\ &= \frac{R-1}{R}\left[\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{s-t}\varepsilon_t\right] \\ &= \frac{R-1}{R}\frac{1}{1-\frac{\rho}{R}}\varepsilon_t \end{aligned}$$

et donc:

$$c_t - c_{t-1} = \frac{R-1}{R-\rho}\varepsilon_t$$

Plus l'autocorrélation des revenus est importante et plus la consommation répond à l'innovation car celle-ci a des effets durables sur les revenus futurs. Cela permet de modéliser l'impact des variations de revenus sur les variations de consommations selon que les fluctuations sont transitoires ou permanentes.

8.3 Le test de l'excès de lissage

La taille de l'autocorrélation du revenu ainsi que la loi suivie par les innovations peuvent être estimées empiriquement et confrontées à la dynamique de la consommation => permet de tester les implications du modèle de marche aléatoire. En particulier, nous pouvons comparer les variances:

$$V[c_t - c_{t-1}] = \left(\frac{R-1}{R-\rho}\right)^2 V[\varepsilon_t]$$

Les études empiriques montrent que la variance de la consommation est plus faible que sa variance théorique => le consommateur ne réagit pas suffisamment aux variations permanentes du revenu: on parle d'**excès de lissage** (Deaton, 1992).

8.4 Consommation et variations prévisibles du revenu

Une implication du modèle de marche aléatoire est que la consommation ne devrait pas varier en fonction des fluctuations prévisibles du revenu. Contrairement aux surprises sur le revenu, toute variation prévisible peut être lissée par le consommateur. Par exemple, une augmentation de salaire, peut faire partie d'un plan de carrière prévisible longtemps à l'avance. Si nous reprenons la loi d'évolution du revenu, la partie prévisible en $t-1$ du revenu est:

$$E_{t-1}[y_t] = (1-\rho)\overline{y} + \rho y_{t-1}$$

La partie imprévisible est:

$$y_t - E_{t-1}[y_t] = \varepsilon_t$$

Comme nous l'avons vu, le modèle implique que la consommation s'ajuste en fonction de la partie imprévisible:

$$c_t - c_{t-1} = \frac{R-1}{R}\left[\sum_{s=t}^{\infty}\frac{1}{R^{s-t}}(E_t[y_s] - E_{t-1}[y_s])\right]$$

qui ne dépend pas de la partie prévisible de la variation de revenu.

Le test de Flavin (1981) fondé sur ce principe rejette le modèle de marche aléatoire et montre que la consommation réagit aux changements prévisibles du revenu. Deaton (1992) estime que la consommation varie entre 30 et 40 quand la part prévisible du revenu varie de 100.

Interprétation en termes de revenu courant: la consommation ne devrait dépendre du revenu courant que dans la mesure où celui-ci renseigne sur les variations permanentes et non anticipées. Cela signifie en pratique une faible corrélation dans la mesure où les variations du revenu courant sont souvent anticipées (par exemple un treizième mois de salaire) et généralement transitoire (exemple du chômage s'il est de courte durée).

En réalité, la consommation réagit également aux variations prévisibles incorporées dans le revenu courant => éléments keynésiens dans la fonction de consommation.

La règle de consommation qui en résulte est toutefois plus complxe que celle défendue par keynes. Toutefois, Browning et Collado (2001) étudient le cas des salariés espagnols dont la majorité reçoivent un treizième mois en juin et un quatorzième en décembre. Ils ne montrent aucune différence entre les dépenses en consommation du groupe qui reçoit ces primes et le groupe qui ne les reçoit pas. Ce résultat est la preuve d'un certain lissage, au moins sur l'horizon d'un an.

Une explication possible est que certains consommateurs sont **contraints financièrement** et ne peuvent emprunter (ou ne veulent pas liquider un plan d'épargne) quand le revenu baisse (voir TD).

Si les résultats du modèle de revenu permanent sont mitigés sur l'horizon de quelques années, il reste à tester ses prédictions sur un horizon plus long.

9 Vérification du modèle de cycle de vie

Le modèle de cycle de vie est un bon point de départ pour tester la théorie de la consommation. Il produit en l'état certaines prédictions qui peuvent être confrontées aux faits:

- Le profil de la consommation est déconnecté de celui du revenu: la consommation est soit croissante, soit stable, soit décroissante le long de la vie (pour un rapport βR qui ne se modifie pas de façon systématique au cours du cycle)
- Etant donné un profil approximativement "en cloche" des revenus au cours du cycle de vie, les ménages sont incités à s'endetter en début de vie active, épargner ensuite puis désépargner pendant la période de retraite.

Ces prédictions du modèle de base concordent-elles avec les observations ?

9.1 Les faits stylisés sur le cycle de vie

Une étude empirique complète demanderait de travailler sur des enquêtes qui suivent des cohortes du début de leur vie active jusqu'à la fin de la vie. A défaut, on dispose soit d'études purement en coupe (un âge = une cohorte) soit des cohortes sur une durée limitée que l'on peut superposer. Les études purement en coupe ne permettent pas de distinguer les effets cohortes des effets âge: est ce que la consommation est faible (ou forte) en raison de l'âge ou en raison de l'historique de cette génération, voire de ses préférences particulières en matière d'épargne ?

Toutefois, on peut dégager les trois faits suivants:

1. La consommation suit approximativement une forme en cloche au cours de la vie => la consommation n'est pas parfaitement lissée sur le cycle de vie.
2. il existe peu d'endettement en début de vie, et peu d'épargne chez la plupart des ménages jusqu'à 40 ans environ.
3. Certains ménages ne désépargnent pas pendant leur retraite

Nous voyons que les prédictions du modèle de base ne cadrent pas avec ces faits. Néanmoins, le modèle de base **simplifie** ou oublie volontairement certaines dimensions du problème d'épargne. Peut-on dans ce cas introduire des hypothèses supplémentaires réalistes qui réconcilient le modèle de cycle de vie avec les données ?

9.2 Peu ou pas d'endettement en début de cycle de vie

Semble contredire la modèle de cycle de vie dans lequel les ménages ont pour objectif de lisser leur consommation sur cet horizon.

9.2.1 La prise en compte des contraintes financières

Facteur explicatif simple et réaliste. Cela revient pour l'agent à consommer son revenu pendant les premières années jusqu'à ce que ses revenus lui permettent de financer son plan de consommation désirée.

9.2.2 L'épargne de précaution

Nous avons jusque là considérer les propriétés du modèle de l'équivalent certain (modèle CEQ). L'incertitude sur les revenus futurs associés à un comportement prudent peuvent limiter la volonté de s'endetter de la part des ménages en début de vie active. La différence avec les contraintes financières est que les ménages décident volontairement de ne pas s'endetter en début de vie.

9.3 La forme "en cloche" de la consommation au cours de la vie

9.3.1 Heuristique ("rule of thumb")

Une première explication revient à postuler un degré de rationalité limitée de la part des consommateurs. Ceux-ci suivraient des règles simples (des heuristiques) de consommation.

Une heuristique est "une règle qu'on a intérêt à utiliser en général, parce qu'on sait qu'elle conduit souvent à la solution, bien que l'on n'ait aucune certitude sur sa validité dans tous les cas" (Langage humain et machine, Presses du CNRS, 1991, p.48.).

=> décision "routinière" qui consiste ici à consommer une fraction fixe du revenu courant. Cette interprétation en terme de rationalité limitée est intéressante mais n'est pas la seule interprétation candidate.

9.3.2 La variation de la taille du ménage sur le cycle de vie

Prenons le modèle de cycle de vie sans incertitude et $\beta R = 1$, ceci afin de bien isoler l'effet de la composition du ménage sur le profil temporel de consommation. Le résultat standard est la constance de la consommation au cours de cycle de vie:

$$u'(c_t) = u'(c_{t+1}) \Rightarrow c_t = c_{t+1},$$

conclusion qui n'est pas observée. Mais dans la réalité, la taille du ménage change au cours du cycle de vie: des enfants naissent et grandissent créant de nouveaux besoins, puis prennent leur autonomie financière.

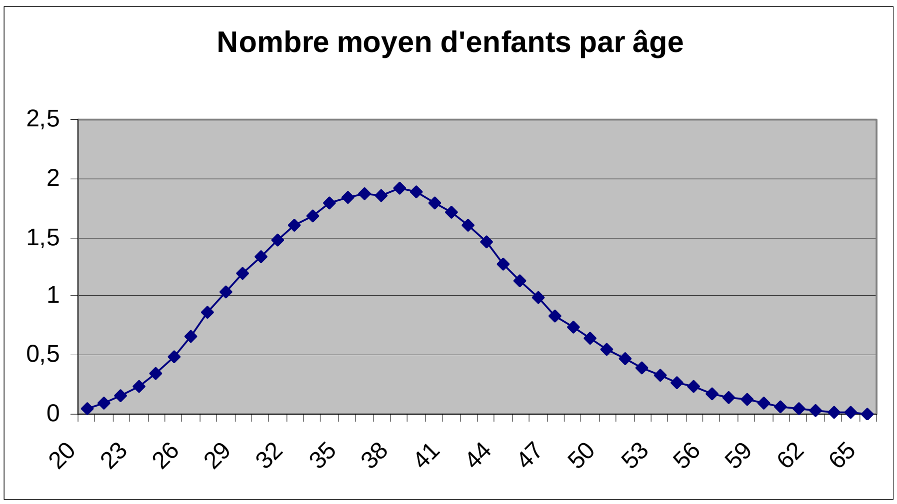
A niveau de consommation donnée, le niveau de vie réelle varie avec la taille z_t du ménage et sa composition.

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(\frac{c_t}{z_t})$$

Pour passer de la taille et de la composition du ménage au "niveau de vie", nous appliquons l'échelle d'Oxford qui prend en compte des rendements d'échelle[4]:

$$z = \begin{cases} 1 \text{ pour le premier adulte} \\ +0,7 \text{ pour le second adulte} \\ +0,5 \text{ pour chaque enfant} \end{cases}$$

Sur données française, le nombre d'enfants moyen par ménage varie en moyenne de la façon suivante au cours du cycle de vie (sources INSEE):

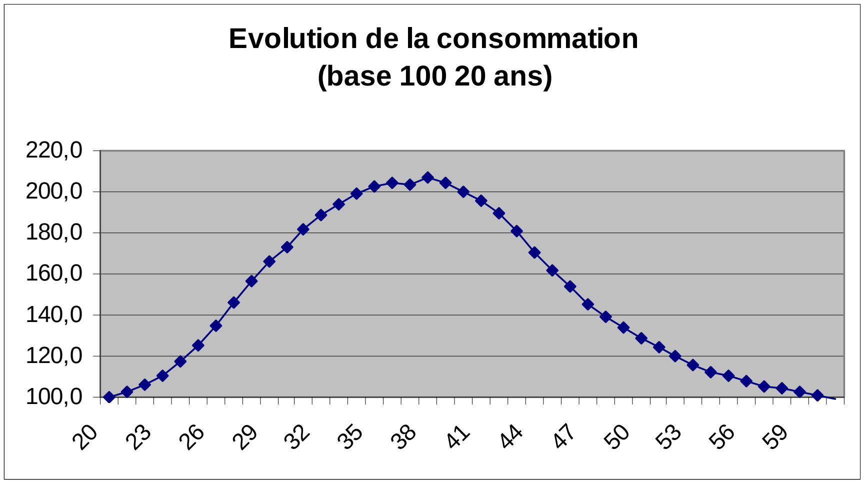


Nous supposons que le ménage tire une utilité de la consommation ainsi normalisée:

$$\begin{aligned} u'(\frac{c_t}{z_t}) &= u'(\frac{c_{t+1}}{z_{t+1}}) \\ &\Rightarrow \left(\frac{c_t}{z_t}\right)^{-1} = \left(\frac{c_{t+1}}{z_{t+1}}\right)^{-1} \text{ dans le } \textbf{cas log} \\ &\Rightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{z_{t+1}}{z_t} \end{aligned}$$

Interprétation: l'utilité marginale de la consommation s'accroît avec la taille du ménage. La croissance (décroissance) de la taille du ménage accroît (réduit) l'utilité marginale de la dépense supplémentaire. La consommation *observée* du ménage varie de telle manière à ce que la consommation *normalisée* reste constante d'un âge à l'autre:

[4] L'échelle d'équivalence préférée en France et en Europe est l'échelle d'Oxford modifiée, soit $1,5 + 0,3.x_n$ avec x_n le nombre d'enfants du ménage.



=> explique la forme en cloche de la consommation et son ampleur: la consommation varie du simple au double dans ce cas, alors même que $\beta R = 1$. => explique pourquoi beaucoup de ménages commencent tardivement à épargner.

9.4 Une partie importante des ménages désépargnent "peu" pendant leur retraite

Dans le modèle le plus simple de cycle de vie, les ménages devraient commencer à désépargner à l'âge de la retraite. Cela nécessite des données de panel qui suivent des cohortes pendant suffisamment longtemps. Par exemple si le revenu baisse aux âges tardifs, c'est en partie parce que les vieilles générations ont moins été rémunérées que les générations qui les précèdent.

9.4.1 Le biais âge-mortalité

Dans les premiers tests du modèle de cycle de vie, les études en coupe montraient que les ménages *continuaient* d'épargner après le passage à la retraite. Double biais: 1/ les ménages qui décèdent tôt disparaissent du panel et sont en moyenne plus pauvres. 2/ Si les ménages anticipent une vie longue, ils vont accumuler plus de richesse à l'entrée de la retraite. Une fois ces biais contrôlés, Hurd (1990) montre que les ménages désépargnent pendant leur retraite mais à un rythme *faible*.

9.4.2 Les actifs indivisibles

Venti et Wise (1990) montrent que les ménages désaccumulent rarement leur épargne à la retraite quand celle-ci prend la forme d'un bien immobilier et s'ils le font, c'est à un âge avancé dans la retraite.

9.4.3 Le "risque de longévité"

Les ménages peuvent continuer d'épargner afin de continuer à financer la consommation dans le cas de longévité. Ce risque ne peut pas tout expliquer néanmoins. Cette épargne de précaution est strictement dominé par une conversion en rente de son patrimoine qui a justement pour but d'assurer ce type de risque, comme le fait déjà la retraite par répartition ou le système des viagers. La plupart des ménages préfèrent conserver leur épargne sous forme de capital plutôt que sous forme d'annuités fixes, ce qui révèle d'autres motifs, comme l'héritage (cf. infra).

9.4.4 L'état de santé et le risque de dépendance

Les ménages doivent non seulement couvrir les besoins futurs d'une vie potentiellement longue mais également faire face à des surcroîts de dépenses en fin de vie.

Il existe actuellement en France environ 800 000 personnes âgées de plus de 60 ans moyennement ou sévèrement dépendantes sur un total de 12 millions de personnes de plus de 60 ans, soit près de 7%. Coût d'une maison de retraite en cas de perte de dépendance : supérieur à 2000 euros. Ce risque est pour l'instant mal assuré: peu d'assurances privées et couverture partielle de l'Allocation Personnalisée Autonomie (APA). Montant de APA: environ la moitié du coût d'une maison de retraite pour les personnes les moins autonomes. En l'absence d'assurance complète, les ménages sont incités à conserver de la richesse personnelle jusqu'à la fin de leur vie.

9.4.5 L'héritage

Une raison potentiellement importante expliquant la décrue limitée du patrimoine dans la dernière période de la vie.

Les transmissions représentent une part faible du patrimoine total:

- Les héritages : $0,5\%$
- les donations officielles : $0,5\%$
- les aides financières descendantes (dons manuels, paiements de loyer, ...) $0,4\%$
- Loyers fictifs provenant d'une cohabitation prolongée, transferts en temps et dépenses d'éducation: *exclus*

soit un total de 1,4% du patrimoine total qui est redistribué chaque année. Si une génération dure 25 ans, environ un tier du patrimoine total est transmis d'une génération à la suivante ($25 \times 1,4\%$).

Les héritages substantiels ne concernent pas le ménage médian. Les transmissions sont très concentrées: environ la moitié des décès ne laissent pas d'héritage (et beaucoups moins il y'a 20 ans). En 2000, 10% des décès transmettaient presque la moitié des transmissions totales (46%). La distribution des héritages est un peu moins inégalitaire que la distribution des patrimoines : 10% des ménages possèdent 50% du patrimoine totale (70% pour les EU).

La présence d'un héritage concentré est plutôt en accord avec les faits stylisés. En effet, la croissance du patrimoine après la retraite touche principalement, mais pas seulement, les hauts patrimoines, ceux dont le motif d'héritage est fort.

10 Bilan: le pouvoir explicatif de revenu permanent

Quelques difficultés à l'horizon du cycle économique. Lissage imparfait (la consommation réagit aux variations prévisibles du revenu), qui peut s'expliquer en partie par des contraintes financières. Le modèle rencontre également des difficultés sur l'horizon du cycle de vie, mais les améliorations cette fois-ci abondent : contraintes financières et épargne de précaution dans la première partie de la vie, facteurs démographiques puis présence d'héritages et épargne de précaution en fin de vie.

Toutefois, les modèles peinent à expliquer la grande hétérogénéité des comportements d'accumulation. Une fois contrôlées par toutes les variables observables (revenus, nombre d'enfants, âge, éducation, etc...), des ménages apparemment identiques ont des comportements d'épargne très différents. Par exemple, à revenu permanent identique, certains ménages arrivent à l'âge de la retraite avec beaucoup d'épargne et d'autre avec peu ou aucune épargne.

Il faut alors prendre en compte des différences dans des facteurs inobservables, comme l'aversion pour le risque et la prudence ou la préférence pour le présent.

Bernheim, Skinner et Weinberg (1997) "What Accounts for the Variation in Retirement Wealth Among U.S. Households" mettent en avant un autre facteur: le lien entre la capacité à planifier et le revenu. L'idée testée est que quelque soient les préférences des consommateurs, le modèle de cycle de vie prédit au moins un lissage de la consommation au passage à la retraite (sans dire combien il faut épargner). Ces auteurs montrent une corrélation positive entre niveau de revenu et taille de la discontinuité dans le profil de consommation au passage à la retraite.

Part II

2ème partie : marchés financiers

11 Principes généraux

Le rôle traditionnellement dévolu aux marchés financiers est de conduire l'épargne vers les investissements les plus rentables. Nous nous intéresserons ici particulièrement au marché boursier. Par rapport à cette fonction générale, la Bourse permet de financer plus d'investissement en rendant plus compatibles les offres et les demande de fonds:

1. Transformation d'échéances (liquidité). Les titres peuvent être revendus à tout instant sur un marché d'occasion. Ainsi, modulo les coûts de transaction, **des investissements longs peuvent être adossés à de l'épargne courte**. L'épargne serait vraisemblablement inférieure ou le rendement demandé en contre-partie supérieur si les investisseurs ne pouvaient jamais revendre leur part. Les entreprises bénéficient à ce titre d'une **prime de liquidité**.

2. Diversification des risques. Les titres de propriété peuvent être **fractionnés à volonté**. Un investisseur, même doté d'une épargne limitée, peut donc acheter une fraction infime du capital d'une entreprise et disperser ses achats. Deux avantages de ce fractionnement:

   (a) Cela permet de financer des investissements volumineux même quand l'épargne n'est pas concentrée entre quelques mains.

   (b) Cela permet également d'acheter d'autres fractions de capital dans d'autres entreprises et ainsi de **diversifier** son portefeuille (encore une fois modulo les coûts de transaction)

La diversification est intéressante pas seulement pour l'épargnant qui en règle générale n'aime pas le risque mais **pour l'économie tout entière**. En s'adressant à des épargnants qui diversifient leur risque, les entreprises peuvent financer des projets d'investissement plus risqués mais doté d'une espérance de rendement importante. Le rendement moyen des investissements en est accru.

12 La valeur fondamentale d'un actif

Un actif est un droit de propriété donnant droit à perception d'un revenu périodique.

Exemple : actions d'entreprises (= boîte noire délivrant des dividendes), immobilier (loyers), terrains (rente), obligations, ressources naturelles (somme actualisée des ventes), les licences de taxi, les brevets, ... Dans les cas d'une licence d'exercer et d'un brevet, le prix de l'actif est constituée de la rente intertemporelle conférée par une barrière à l'entrée.

Ce revenu peut être **variable** comme pour les dividendes d'actions ou constant comme les intérêts d'une obligation ou le loyer d'un appartement (à l'incertitude près sur l'évolution des prix puisque les contrats sont en général conclus en termes nominaux).

L'actif sous-jacent peut être à durée de vie infinie (ou potentiellement infinie) et finie, etc ...

Comment se déterminent le prix des actifs? Par une condition de non-arbitrage (CDNA) entre l'actif en question et un actif sans risque (ici l'actif pivot de l'économie).

12.1 La Condition de non arbitrage entre deux titres

Par définition, un actif certain sur une période rapporte $1+r$ euros pour chaque euro détenu dans cet actif à la première période. L'actif risqué est acheté au prix p_t, permet d'obtenir le dividende d_{t+1} (ou tout autre revenu délivré par l'actif), puis se revend au prix p_{t+1}.

	prix d'achat en t	prix de revente en t+1
actif certain	1	$1+r$
actif risqué	p_t	$p_{t+1}+d_{t+1}$

La condition de non arbitrage entre cet actif certain et l'actif risqué implique:

$$1+r=\frac{E_t(p_{t+1}+d_{t+1})}{p_t} \tag{3}$$

avec $E_t(.)=E(.|I_t)$ l'espérance conditionnelle à l'information I_t détenue à la date t. La CDNA est fondée sur un **épuisement des opportunités d'arbitrage** avec un actif à une période délivrant le revenu $1+r$ la période suivante pour chaque euro investi. Supposons en effet qu'il reste des possibilités d'arbitrages (gains sans risques):

$$1+r>\frac{E_t(p_{t+1}+d_{t+1})}{p_t}$$

Si les anticipations sont homogènes, personne ne souhaiterait acheter l'actif au prix p_t et tous ses détenteurs souhaiteraient s'en débarrasser pour placer la recette de la vente dans l'actif sûr. Cela aurait pour conséquence de diminuer le prix courant jusqu'à l'égalité avec le rendement alternatif.

Dans le cas inverse, tout le monde souhaiterait acheter le titre, ce qui ferait monter son prix jusqu'à satisfaire également la condition (3).

Exprimé en terme de prix d'actifs:

$$p_t=aE_t(p_{t+1}+d_{t+1})$$

avec $a=1/(1+r)$ le facteur d'actualisation supposé constant au cours du temps.

12.2 Le cas certain

Condition de transversalité:

$$\lim_{h\to\infty} a^h p_{t+h} = 0 \tag{CT}$$

La condition (CT) revient à supposer que le prix croît sur longue période strictement moins vite que le taux d'intérêt.

Proposition. Si (CT) est satisfaite, le prix est égal à sa valeur fondamentale (ou valeur intrinsèque):

$$p_t = \sum_{i=1}^{\infty} a^i d_{t+i} \tag{4}$$

En effet, si on itère vers l'avant la relation jusqu'à la période $t+h$, on trouve:

$$p_t = \sum_{i=1}^{h} a^i d_{t+i} + a^h p_{t+h}$$

Le prix est une somme de deux termes. Peut-on itérer la relation à l'infini ? Oui, si on suppose que le **second terme** satisfait (CT) et si la somme actualisée des dividendes converge ie. le dividende croît moins vite que le taux d'intérêt.

La théorie de la valeur fondamentale nous dit que le prix d'un actif doit être égal à la somme actualisée de ses revenus. La valeur est fondamentale car elle dépend seulement des conditions de production et de rentabilité de l'entreprise, et pas de la psychologie des marchés ou autres. Les prix dépendent de la sphère réelle.

12.3 Valeur fondamentale en environnement incertain

Reprenons la condition de non arbitrage à une période. La condition (3) ne donne le prix courant qu'en fonction du prix futur anticipé. Contrairement au cas certain, le passage à la valeur fondamentale nécessite **des hypothèses sur la manière dont les agents forment leurs anticipations**.

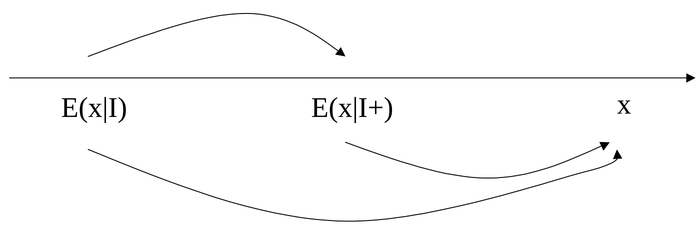
$$p_t = aE_t(p_{t+1} + d_{t+1}) \tag{CDNA}$$

Condition de transversalité modifiée:

$$\lim_{h\to\infty} a^h E_t(p_{t+h}) = 0 \tag{CT}$$

Si la dynamique du prix satisfait la condition de transversalité (le prix ne s'accroît pas trop vite en espérance).

On va dans la suite requérir un minimum de cohérence dans la façon dont les investisseurs forment leurs anticipations à différentes dates. On va supposer satisfaite **la loi des espérances itérées**, introduite en finance par Samuelson (1965), puis intégrée dans la propriété plus vaste des anticipations rationnelles.



[Repères: Muth (1960, 61), voir également le livre de Sargent "Bounded rationality"]. Cette loi dit la chose suivante:

Définition. La loi des espérances itérées (LEI). Soit deux ensembles d'information ω et Ω avec ω un sous-ensemble de l'ensemble d'information Ω:

$$\omega \subset \Omega$$

Alors:

$$E[E(x|\Omega)|\omega] = E(x|\omega)$$

C'est une conséquence de la rationalité des anticipations au sens où les agents sont supposés exploiter au mieux toute l'information disponible à chaque instant pour prévoir les variations futures. Si cela n'était pas le cas une des deux prévisions ne serait pas optimale.

Application: En l'absence de pertes de mémoire, l'ensemble d'information en t étant toujours inférieur à l'ensemble d'information en $t+1$, lui-même inférieur à l'ensemble d'information en $t+2$ etc ... on a:

$$E[E(x_{t+2}|I_{t+1})|I_t] = E(x_{t+2}|I_t)$$

ou avec des notations plus simples:

$$E_t[E_{t+1}(x_{t+2})] = E_t(x_{t+2})$$

Proposition. Si la CDNA, la CT et la LEI sont satisfaites, le prix est égal à sa valeur fondamentale en incertitude:

$$p_t = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E_t(d_{t+i})$$

Démonstration. La CDNA implique :

$$p_t = aE_t(p_{t+1} + d_{t+1}) \qquad \text{(CDNA)}$$

Si on itère vers l'avant la relation jusqu'à la période $t + h$, et en se servant de la LEI, on trouve:

$$\begin{aligned}
p_t &= aE_t[aE_{t+1}(p_{t+2} + d_{t+2}) + d_{t+1}] \\
&= a^2 E_t[E_{t+1}(p_{t+2} + d_{t+2})] + aE_t(d_{t+1}) \\
&= a^2 E_t(p_{t+2} + d_{t+2}) + aE_t(d_{t+1}) \\
&= a^2 E_t(aE_{t+2}(p_{t+3} + d_{t+3}) + d_{t+2}) + aE_t(d_{t+1}) \\
&= a^3 E_t(p_{t+3} + d_{t+3}) + a^2 E_t(d_{t+2}) + aE_t(d_{t+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{h} a^i E_t(d_{t+i}) + a^h E_t(p_{t+h})
\end{aligned}$$

La CT implique quand $h \to \infty$ la proposition.

Comme dans le cas certain, le prix atteint une valeur finie si le dividende espéré ne croît pas plus vite que le taux d'intérêt (différent de la condition de transversalité). La formule de la valeur fondamentale est identique dans le cas certain et le cas incertain excepté que les dividendes sont remplacés par leur valeur espérée. **La théorie de la valeur fondamentale se généralise au cas avec incertitude si de plus nous adoptons la loi des espérances itérées.**

13 La volatilité des cours

Les prix des actions sont-ils trop volatiles par rapport aux mouvements des fondamentaux?

Idée générale des tests de plafond de variance: pourquoi les prix varient ? Dans la théorie de la valeur fondamentale, les prix varient car les dividendes varient eux-mêmes. Ces mouvements reflètent les mouvements des fondamentaux eux-mêmes.

Reformulation de la question: les prix varient-ils trop par rapport aux fluctuations des dividendes ? La question n'est pas simple car ce sont les dividendes anticipés futurs qui affectent le prix.

Les articles de Shiller (1981) et de Le Roy et Porter (1981) offrent une méthode permettant de répondre à cette question. Reprenons la formule de la valeur fondamentale conditionnelle à l'ensemble d'information I_t:

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E(d_{t+i}|I_t) \tag{(VF)}$$

Appelons P_t^* le prix théorique *ex post* égal à la somme actualisée des dividendes réalisés:

$$P_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} a^i d_{t+i} = E(P_t|\infty)$$

Passons l'opérateur d'espérance conditionnelle à I_t à cette équation:

$$E(P_t^*|I_t) = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E(d_{t+i}|I_t) = P_t$$

Que nous dit cette équation sur le prix d'un actif ? Si les agents prévoient rationnellement, c'est une prévision non biaisée de la somme actualisée des dividendes futurs: doté de l'information I_t, P_t est un **prédicteur** non biaisé de P_t^*. La meilleure prévision de la valeur fondamentale *ex post* est le prix de marché lui-même.

Passons des deux côtés l'opérateur d'espérance conditionnel à P_t:

$$E[E(P_t^*|I_t)|P_t] = E(P_t|P_t)$$

soit:

$$E(P_t^*|P_t) = P_t \tag{5}$$

en raison de la loi des espérances répétées (ou itérées) car $P_t \subset I_t$ ($E[E(x|\Omega)|\omega] = E(x|\omega)$).

Définissons l'erreur de prévision u_t:

$$u_t = P_t^* - P_t \tag{6}$$

L'égalité (6) en espérance conditionnelle à P_t devient elle-même:

$$E(u_t|P_t) = E(P_t^*|P_t) - P_t = 0$$

et donc

$$E(u_t|P_t) = 0$$

en raison de (5). Cela implique que l'erreur de prévision ne doit pas être corrélée avec la prévision elle-même, c'est à dire que $cov(P_t, u_t) = 0$.

En conséquence, la connaissance du prix ne doit pas permettre de prévoir l'erreur de prévision. Par exemple en régressant l'erreur sur le prix, le coefficient doit être nul. Dans le cas contraire, la prévision pourrait être améliorée (par exemple si la corrélation était positive, cela signifierait que l'erreur croît en moyenne avec la prévision, ce qui n'est pas cohérent avec l'idée de meilleure prévision).

Passons de l'égalité (6) à $P_t^* = P_t + u_t$ puis en variance:

$$V(P_t^*) = V(P_t) + V(u_t) + 2cov(P_t, u_t)$$

et donc:

$$V(P_t^*) \geq V(P_t)$$

car $V(u_t) \geq 0$. La variance du cours réel est bornée par celle du cours théorique. L'intuition est simple: l'opérateur espérance est une valeur intermédiaire entre les valeurs réelles.

Exemple extrême si les dividendes futurs ne dépendent pas de l'information passée: $E(d_{t+i}|I_t) = E(d_{t+i}) = \overline{d}$. Dans ce cas, le cours de l'action est constant:

$$p_t = \frac{1}{1-a}\overline{d}$$

malgré une valeur *ex post* qui peut fluctuer largement.

Résultats trouvés par Shiller (1981). Méthode d'estimation de la valeur *ex post*:

$$P_t^* = \sum_{i=1}^{T-t-1} a^i d_{t+i} + a^{T-t} P_T^*$$

P_T^* est ensuite une simple projection des P_t^* passés. L'influence de cette approximation est surtout présente pour les dernières années de l'échantillon. Résultats:

	SP 500 (1871-1979)	Dow Jones (1928-1979)
$\sigma(P)$	$50,12$	$355,9$
$\sigma(P^*)$	$8,97$	$26,8$
facteur	$5,6$	$13,28$

De très nombreuses études empiriques ont amélioré la qualité du test de Shiller (1981) pour savoir si ce résultat était dû à la méthode économétrique. Depuis les années 90, un consensus a fait jour qui valide la proposition de Shiller à savoir que le modèle de la valeur fondamentale ne permet pas de rendre compte de la volatilité des cours (voir Le Roy, 1989 ou le livre de Shiller (2005, "Exubérance irrationnelle").

Représentation graphique de P (en log) et P^* ("An unbiased reexamination of stock market volatility" par Mankiw, Romer et Shapiro, Journal of Finance 1985):

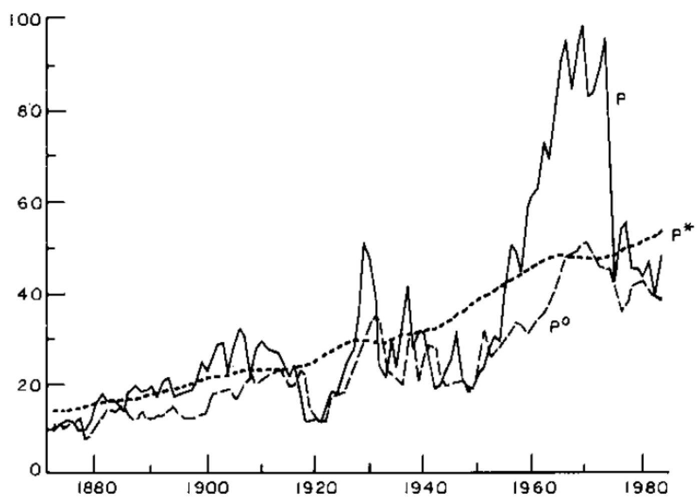


Figure 2. The Perfect Foresight Price (P^*), the Naive Forecast Price (P^0), and the Market Price (P) for the case $r = 6\%$.

Sur ce graphique la valeur *ex post* est extrêmement lisse: c'est une moyenne qui lisse les fluctuations de dividendes. Même pendant la Grande Dépression: entre septembre 1929 et juin 1932, l'Index composite Standard & Poors chute de 80,6%. Au même moment, la valeur *ex post* chute seulement de 3,1%. En fait, le dividende réel a peu chuté. Donc on s'aperçoit *ex post* qu'aussi bien la hausse des cours dans les années 30 que leur chute ont été deux erreurs monumentales d'appréciation.[5]

Remarque 1. Ce résultat renvoie à une volatilité sur très longue période. Il existe également une volatilité à haute fréquence (quelques jours, semaines ou mois) qui ne peut pas être testée ici puisque les dividendes sont annuels.

Remarque 2. En moyenne, le prix n'est pas déconnecté du dividende: le prix reste en ligne à long-terme avec la valeur fondamentale. C'est bien d'abord un problème de volatilité plutôt que de biais systématique de la prévision de long-terme.

14 Bulles

Le résultat de volatilité excessive des cours peut-il s'expliquer par la présence de bulles financières ? Puisque la valeur fondamentale ne fluctue pas suffisamment pour rendre compte des mouvements de prix observés, il faut étudier la possibilité que le prix dévie systématiquement de cette référence. De façon cohérente, une bulle est définie comme un écart persistant à la valeur fondamentale.

Le modèle d'arbitrage qui sert de fondement au principe de la valeur fondamentale est-il compatible avec la présence de bulles spéculatives? Dans cette section nous montrons que l'hypothèse d'équilibre des marchés et de rationalité des agents ne prévient pas nécessairement l'émergence de bulles spéculatives (Blanchard, 1979).

Nous avons vu au cours de l'étude sur la valeur fondamentale qu'en partant de la règle d'absence d'arbitrage

$$p_t = aE_t(p_{t+1} + d_{t+1}) \tag{7}$$

la dynamique du prix obéissait:

$$p_t = \sum_{i=1}^{h} a^i E_t(d_{t+i}) + a^h E_t(p_{t+h})$$

De plus, si la condition de transversalité est satisfaite:

$$\lim_{h\to\infty} a^h E_t(p_{t+h}) = 0$$

[5] De très nombreuses études empiriques ont amélioré la qualité du test de Shiller (1981) pour savoir si ce résultat était dû à la méthode économétrique. Des débats contradictoires ont parcouru les années 80. Depuis les années 90, un consensus a fait jour pour dire que le modèle de la valeur fondamentale ne permet pas de rendre compte de la volatilité des cours. Voir LeRoy (1989).

nous trouvons que le prix, noté p_t^*, est fonction des seuls dividendes futurs (rappel):

$$p_t^* = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E(d_{t+i}|I_t)$$

En fait, la condition de transversalité apporte une restriction sur les solutions de la condition (7). D'autres solutions existent si cette restriction est levée qui ne correspondent pas à la valeur fondamentale[6]. Posons l'équation générale de prix comme l'addition de la valeur fondamentale et d'un terme, appelé bulle, de déviation par rapport à cette valeur:

$$\widehat{p}_t = p_t^* + b_t \tag{8}$$

Pour être une solution, le prix $\widehat{p}_t$ doit être une solution de l'équation de récurrence (7) ie. satisfaire la condition de non arbitrage:

$$\widehat{p}_t = aE_t(\widehat{p}_{t+1} + d_{t+1})$$

Posons l'équation (8) en $t+1$ et ajoutons d_{t+1} des deux côtés:

$$\widehat{p}_{t+1} + d_{t+1} = p_{t+1}^* + d_{t+1} + b_{t+1}$$

Passons à l'espérance conditionnelle et multiplions des deux côtés par le facteur a:

$$aE_t(\widehat{p}_{t+1} + d_{t+1}) = aE_t(p_{t+1}^* + d_{t+1}) + aE_t(b_{t+1})$$

Par définition, p_t^* satisfait cette condition:

$$p_t^* = aE_t(p_{t+1}^* + d_{t+1})$$

Ce qui nous donne après substitution:

$$\widehat{p}_t = p_t^* + aE_t(b_{t+1})$$

En reprenant l'équation (8) on voit immédiatement que:

$$\begin{aligned} b_t &= aE_t(b_{t+1}) \\ &\Rightarrow E_t(b_{t+1}) = (1+r)b_t \end{aligned}$$

L'idée est la suivante: $\widehat{p}_t$ doit être une solution de l'équation de récurrence (7) ie. satisfaire la condition de non arbitrage. Par définition, p_t^* satisfait également cette condition. Donc le troisième terme de (8) doit également la satisfaire, c'est à dire rapporter *en moyenne* le rendement $1+r$ (seule restriction sur la loi de b_t).

Le terme b_t s'interprète comme une bulle au sens où il est un écart du prix à la valeur fondamentale. La valeur b_t a la particularité de n'être pas fondée

[6] Il n'existe pas de raisons mathématiques en faveur de cette restriction, la condition (7) est une équation de récurrence classiqueexcepté que la variable courante dépend de ses valeurs futures plutôt que passées.

sur la distribution de dividendes. La seule manière de rapporter en moyenne le rendement sans risque est de croître en moyenne au taux $1+r$, ce qui permet de bénéficier d'un gain en capital à la revente.

Parfaite séparation du prix en ses deux composantes: la première composante a un prix parce qu'elle est associée à la perception de dividendes, la seconde parce qu'elle est fondée sur des gains en capital, des plus-values.

15 Le prix des actifs fondé sur la consommation

Nous avons jusqu'à présent supposé la neutralité face au risque: le prix d'un actif est simplement l'espérance de la somme actualisée des flux de revenus. L'investisseur est indifférent à la distribution des revenus au cours du temps tant que cela maintient la moyenne des flux actualisés.

Cette hypothèse peut se justifier par le fait que l'investisseur élimine le risque d'un actif particulier en choisissant un portefeuille diversifié. Mais nous savons également que la diversification complète n'est pas possible en équilibre général, quand nous prenons ensemble tous les actifs de l'économie. Il reste un risque résiduel non diversifiable.

Dans la suite, nous levons l'hypothèse de neutralité face au risque et regardons comment les agents valorisent chaque titre financier.

15.1 Le lien entre le prix des titres et la consommation: esquisse du raisonnement

Supposons que l'agent ait le choix entre 3 actifs dont la valeur fondamentale moyenne est égale. Le profil de consommation hors revenus financiers d'un agent suit la loi suivante:

	temps:	**1**	**2**
conso hors dividende	c_t	10	20
actif 1 (prix p_1 en 0)	d_{1t}	0	4
conso totale 1	$c_t + d_{1t}$	**10**	**24**
actif 2 (prix p_2 en 0)	d_{2t}	4	0
conso totale 2	$c_t + d_{2t}$	**14**	**20**
actif sans risque 3	d_{3t}	2	2
conso totale 3	$c_t + d_{3t}$	**12**	**22**

flux de consommation et de revenus

Pas de préférence pour le présent ($\beta = 1$) et taux d'intérêt nul. L'investisseur va préférer à prix égal ($p_1 = p_2 = p_3 = p$), l'actif risqué 2 à l'actif sans risque et l'actif sans risque à l'actif risqué 1:

$$
\begin{aligned}
& u(c_0 - p) + u(14) + u(20) \\
> \quad & u(c_0 - p) + u(12) + u(22) \\
> \quad & u(c_0 - p) + u(10) + u(24)
\end{aligned}
$$

en raison de $u''(.) < 0$.

Cette relation stricte de préférence n'est pas possible au niveau macroéconomique:

tous les actifs sont détenus à l'équilibre.

Il faut donc compenser l'investisseur moyen du risque encouru par une prime de risque:

$$
\begin{aligned}
& u(c_0 - p_1) + u(14) + u(20) \\
= \quad & u(c_0 - p_2) + u(12) + u(22) \\
= \quad & u(c_0 - p_3) + u(10) + u(24)
\end{aligned}
$$

avec:

$$p_1 < p_2 < p_3$$

Par exemple, un actif dont la rentabilité augmente avec le taux de chômage devrait être positivement valorisé. La prime de risque de chaque actif est donc déterminée par sa corrélation avec la consommation agrégée, la consommation de l'investisseur moyen.

15.2 Le choix épargne/consommation avec une multitude d'actifs

Partons d'un problème général de choix épargne/consommation avec une multitude de titres indicés i, support de l'épargne. A chaque période, l'agent perçoit un revenu d'activité y_t auquel s'ajoutent les revenus financiers

$$x_t^i \overset{\text{DEF}}{=} p_t^i + d_t^i$$

de chaque titre. Il épargne une partie de son revenu total sous la forme d'achats de titres financiers dont les prix unitaires sont p_t^i.

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\max\limits_{\{c_t\}} u(c_t) + E_t[\sum\limits_{s=1}^{\infty} \beta^t u(c_{s+t})] \\
\text{s.c. } y_t + \sum\limits_i e_{t-1}^i x_t^i = c_t + \sum\limits_i p_t^i e_t^i \\
\{p_t^i\}_{t=1,\ldots}^{i=1,\ldots} \text{ donnés}
\end{array}
\right. \qquad \text{(conserver)}
$$

où e_t^i est le nombre d'actions achetées par l'agent. A chaque période, celui-ci reçoit le produit de son épargne placée la période précédente, le consomme en partie et répartit le reste entre les différents actifs. L'investisseur prend la séquence de prix comme donnée. Remplaçons les consommations par leur valeur dans la contrainte budgétaire et dérivons par rapport à e_{t+1}:

$$\max_{\{c_t\}} u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] + ...$$

$$\max_{\{c_t\}} u(y_t + \sum_i e^i_{t-1} x^i_t - \sum_i p^i_t e^i_t) + \beta E_t[u(y_{t+1} + \sum_i e^i_t x^i_{t+1} - \sum_i p^i_{t+1} e^i_{t+1})] + ...$$

La condition du premier ordre sur l'actif i est:

$$u'(c_t) = \beta E_t[u'(c_{t+1}) \frac{x^i_{t+1}}{p^i_t}] \qquad (9)$$

avec

$$\frac{x_{t+1}}{p^i_t} \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{p^i_{t+1} + d^i_{t+1}}{p^i_t}$$

le rendement du titre.

Il existe autant de conditions d'optimalité que de titres dans l'économie. L'investisseur prend la structure des prix comme donnée et achète plus ou moins de chaque actif jusqu'à ce que la condition soit vraie. C'est à la fois un modèle de portefeuille optimal et un modèle classique de consommation/épargne dans lequel la consommation d'aujourd'hui est fonction de l'anticipation du rendement moyen de l'économie de demain.

Ce qui nous intéresse ici n'est pas l'allocation optimale de la consommation mais dans la lignée de la théorie du CAPM ou de la valeur fondamentale **le prix des nombreux actifs qui forment les supports de l'épargne**. Pour cela, nous allons utiliser le même problème mais allons inverser la perspective. Ce n'est plus un problème de choix de consommation à prix des actifs donnés mais une théorie du prix des actifs eux-même à processus de consommation donné.

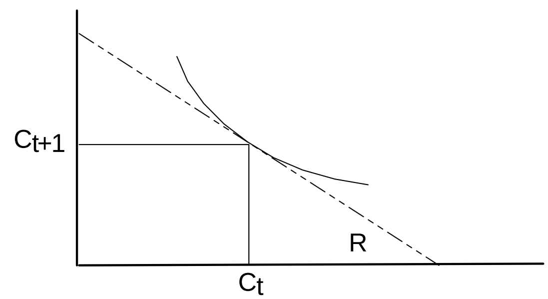
15.3 Le prix des actifs en équilibre général

15.3.1 Principe

Ce qui nous intéresse ici n'est pas en soi la politique d'épargne de l'agent, c'est le prix des actifs nombreux et variés de l'économie: actions, obligations, appartements, ...

Les deux problèmes: choix des consommations et la valorisation des titres peuvent se séparer: au niveau macroéconomique avec agent représentatif, chaque actif est petit en taille par rapport au stock total d'épargne. Le premier problème (dont découle la connaissance de la loi suivie par le TMS) dépend des variables agrégées. Le second problème est illustré très simplement par le graphique suivant:

Si on connaît les préférences de l'agent (ici le degré de substitution intertemporelle de la consommation) et ses consommations, on peut en déduire de façon



univoque le taux d'intérêt d'équilibre implicite, c'est à dire la pente de la contrainte budgétaire de l'agent. C'est ce que nous allons faire dans la suite dans un modèle plus complet. En partant d'hypothèses sur les préférences de consommation, et en utisant les conommations d'équilibre, nous allons retrouver les prix des actifs.

15.3.2 Prix et taux marginal de substitution (TMS)

L'équation (9) d'un titre donné i s'écrit encore:

$$p_t^i = E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}^i]. \tag{10}$$

Peut-on évaluer les actifs de l'économie en supposant constante la dynamique des consommations? Oui pour deux raisons. 1) Chaque actif i étudié n'est qu'une infime partie de l'ensemble composant le patrimoine et peut donc être valorisé en supposant constante la dynamique suivie par les consommations. 2) Si l'actif est détenu à l'équilibre, c'est encore plus direct car l'investisseur valorise l'actif en faisant varier sa détention à la marge, ce qui laisse inchangé le TMS. On n'a ainsi nul besoin de connaître le stock total de l'actif dans l'économie[7].

Principe de parcimonie: c'est le même modèle qui détermine l'épargne optimale et qui fixe les prix des actifs individuels.

Pour simplifier les notations, définissons le facteur d'actualisation stochastique m_{t+1}:

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

m_{t+1} est également le taux marginal de substitution (TMS) de la consommation entre les deux dates.

[7] C'est ce que fait Lucas (1978). Lucas assimile les actifs à des arbres dont les dividendes sont les fruits. Les arbres ne sont pas reproductibles, et les fruits ne sont pas stockables: les agents doivent consommer exactement la production exogène sans possibilité d'épargne. Ils doivent détenir tous les arbres à l'équilibre et les prix doivent les forcer à consommer exactement les fruits.

L'équation (10) peut simplement se réécrire:

$$\boxed{p_t^i = E_t(m_{t+1}x_{t+1}^i).} \tag{11}$$

La connaissance de la loi suivie par le TMS permet de valoriser tous les actifs de l'économie!

Le facteur d'actualisation stochastique (ou TMS) généralise l'idée d'actualisation dans un cadre avec aversion au risque. En effet, si l'investisseur est neutre face au risque: $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$ et $m = \beta$:

$$p_t^i = \beta x_{t+1}^i = \beta(p_{t+1}^i + d_{t+1}^i).$$

On retrouve la CDNA classique avec neutralité face au risque.

Nous illustrons ce principe en l'appliquant à un actif central en finance: l'actif sans risque.

15.3.3 Exemple: le taux d'intérêt sans risque

L'actif sans risque paye en seconde période:

$$x_{t+1} = R_{t+1}^f$$

(R_{t+1}^f dépend du temps car même s'il est connu une période avant, il fluctue de période en période) pour chaque euro déposé en première période: $p_t = 1$. On a alors une théorie explicative du taux sans risque:

$$R_{t+1}^f = 1/E_t[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}] = 1/E_t(m_{t+1})$$

Le taux sans risque est l'inverse du TMS.

Pour obtenir un peu plus d'intuitions, supposons que la fonction d'utilité est de type puissance:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Pour calculer le taux sans risque moyen de long-terme dans une économie, partons du cas **sans incertitude** et plaçons nous dans une perspective de long-terme: quel est le taux d'intérêt compatible avec une croissance donnée de la consommation?

$$R_{t+1}^f = 1/\beta[\frac{c_{t+1}}{c_t}]^{-\gamma} = \beta^{-1}[\frac{c_{t+1}}{c_t}]^{\gamma} = \beta^{-1}g_{t+1}^{\gamma}$$

Posons $\beta = 1/(1+\delta) \sim e^{-\delta}$ ([8]) et passons en log:

$$\ln R_{t+1}^f = \delta + \gamma \ln g_{t+1}$$

Nous voyons qu'il existe **deux facteurs** du taux d'intérêt sans risque:

[8] β s'interprète comme le facteur d'actualisation d'une durée h (par exemple $h = 90$ jours avec le jour comme unité temporelle "petite"):

$$(\frac{1}{1+\delta h})^{1/h}$$

- Le taux d'intérêt est d'autant plus élevé que les consommateurs sont impatients: β faible. Si tous les agents souhaitent consommer maintenant, il faut un taux d'intérêt plus élevé pour les inciter à épargner et consommer demain.

- Le taux d'intérêt est d'autant plus élevé que la consommation croît fortement au cours du temps. En effet, les consommateurs souhaitent lisser leur consommation et préfèrent un profil plat plutôt que croissant. Un taux d'intérêt élevé les incite à épargner, ce qui génère le profil croissant de la consommation.

- Ce dernier effet dépend également de γ qui est l'inverse du taux de substitution intertemporelle de la consommation. Le coefficient de substitution intertemporelle de la consommation est en effet défini par:

$$-\frac{u'(c)}{cu''(c)} = \frac{1}{\gamma}$$

C'est le coût en terme d'utilité marginale d'un déplacement de consommation entre deux périodes. Ce coefficient mesure le degré de facilité avec lequel l'agent change sa consommation au cours du temps. Plus l'utilité est concave, plus le coefficient est faible, plus il est coûteux en terme d'utilité marginale pour l'agent de modifier sa consommation, plus γ est important et plus le taux d'intérêt sans risque doit être élevé. Cet effet renforce l'effet de la croissance de la consommation sur le taux d'intérêt.

Si les préférences sont proches de la linéarité, l'agent s'intéresse à la consommation moyenne bien plus qu'à sa dispersion temporelle, dans ce cas γ est proche de 0 et $R^f = 1/\beta$: ne reste que la préférence pour le présent.

Application numérique:

France (moyenne 1979-2001, id 82-00): $\delta = 0,044$ correspond à $\beta = 0,99$, $E[\ln(g)] \simeq E[\frac{c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}}] = 1,8\%$.

- "faible" degré de substitution intertemporelle: $\gamma = 3 \rightarrow r^f = 0,044 + 3.0,018 = 9,8\%$.

- "fort" degré de substitution intertemporelle: $\gamma = 0,5 \rightarrow r^f = 0,044 + 0,5.0,018 = 5,3\%$.

---

avec δ le coeficient d'actualisation subjectif par unité de temps. Ce qui se réécrit:

$$\exp(-\frac{1}{h}\log(1+\delta h))$$

ce qui devient quand $h \rightarrow 0$ (la durée de temps devient infinitéssimale):

$$\exp(-\frac{1}{h}\delta h) = \exp(-\delta).$$

On peut également le voir dans l'application numérique comme un changement de variable temporaire.

Taux de rendement réel des obligations en France (moyenne 1982-2000): 8%
Taux de rendement réel des obligations en France (moyenne 1972-82): 3%
Remarque: les rendements observés sont significativement plus faibles si on prend les livrets A au lieu des obligations.

L'ajout de l'incertitude

Les consommateurs souhaitent toutes choses égales par ailleurs un profil temporel de consommation plus plat mais également une consommation certaine à une consommation qui varie entre les états de la nature. La présence d'aléa sur la consommation va donc également affecter le niveau du taux d'intérêt sans risque. Quels sont les effets de l'incertitude concernant la consommation future sur le taux sans risque?

$$\begin{aligned} R^f_{t+1} &= 1/E_t[\beta(\frac{c_{t+1}}{c_t})^\gamma] \\ &= 1/E_t[e^{-\delta}e^{-\gamma\ln(\frac{c_{t+1}}{c_t})}] \end{aligned}$$

en posant $\beta = e^{-\delta}$ le pendant en temps continu du facteur d'actualisation. Je suppose que $\ln(\frac{c_{t+1}}{c_t}) = \ln g_{t+1}$ suit une loi normale[9]. Or si z est normal:

$$E(e^z) = e^{E(z)-\frac{1}{2}\sigma^2(z)}$$

Donc:

$$\begin{aligned} R^f_{t+1} &= 1/e^{-\delta}e^{-\gamma E_t(\ln g_{t+1})+\frac{\gamma}{2}\sigma^2(\ln g_{t+1})} \\ &= e^{\delta+\gamma E_t(\ln g_{t+1})-\frac{\gamma}{2}\sigma^2(\ln g_{t+1})} \end{aligned}$$

Passons au log des deux côtés:

$$\ln(R^f_{t+1}) \simeq r^f_{t+1} = \delta + \gamma E_t(\ln g_{t+1}) - \frac{\gamma}{2}\sigma^2(\ln g_{t+1})$$

A comparer avec la formule sans incertitude:

$$r^f_{t+1} \simeq \delta + \gamma \ln g_{t+1}$$

Comme précédemment, le taux sans risque croît 1) avec l'impatience, 2) avec le taux de croissance de l'économie proportionnellement au facteur γ. S'ajoute un troisième terme qui capture **l'épargne de précaution**.

Quand le taux de croissance de la consommation est plus volatile ($\sigma^2(\ln g_{t+1})$ élevé), les consommateurs sont relativement plus touchés défavorablement par les récessions que favorablement par les expansions. Ils souhaitent de ce fait

[9] Ce qui signifie que le taux de croissance de la consommation suit approximativement une loi normale: $\ln(\frac{c_{t+1}}{c_t}) = \ln(1 + \frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}) \simeq \frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}$.

accumuler plus d'épargne pour amortir les fluctuations de g. Un taux inférieur les en empêche[10].

Cela illustre bien les deux dimensions du coefficient γ: l'aversion aux fluctuations temporelles même certaines et l'aversion au risque.

Application numérique:
$\delta = 0,044$ correspond à $\beta = 0,99$
France (moyenne 1979-2001): $E[\ln(g)] \simeq E[\frac{c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}}] = 1,8\%$ et $\sigma[\frac{c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}}] = 1\%$.

- "faible" degré de substitution intertemporelle: $\gamma = 3 \rightarrow r^f = 0,044 + 3.0,018 - 1,5.0,01^2 = 9,8\%$.
- "fort" degré de substitution intertemporelle: $\gamma = 0,5 \rightarrow r^f = 0,044 + 0,5.0,018 - 0,25.0,01^2 = 5,3\%$.

15.3.4 La condition de non-arbitrage

Revenons au problème général de valorisation des actifs. On peut avoir une première idée de la façon dont se détermine la structure des prix des actifs. Prenons un actif pivot, soit l'actif sans risque ($x_{t+1} = R^f$ pour chaque euro déposé en première période: $p_t = 1$). A partir de l'équation d'équilibre (9), sa condition s'écrit:

$$u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1}) R^f]$$

Le rendement attendu de chaque actif i doit satisfaire la condition de non arbitrage suivante avec l'actif sans risque:

$$E_t[\beta u'(c_{t+1}) R^f] = E_t[\beta u'(c_{t+1}) \frac{x^i_{t+1}}{p^i_t}]$$

Le prix p_t doit inciter les agents économiques à racheter le stock d'actions existants. Ni plus ni moins (pour boucler le modèle il faudrait supposer une offre de titre; la variable x dépend également du secteur productif et de son rendement-risque). Soit encore:

$$E_t[\beta u'(c_{t+1})(\frac{x^i_{t+1}}{p^i_t} - R^f)] = 0$$

Equivalent en équilibre général de la CDNA avec neutralité au risque.

[10] Cette relation s'interprète également dans le sens plus traditionnel: un taux d'intérêt élevé favorise l'épargne et le taux de croissance de la consommation et encourage l'épargne de précaution, ce qui réduit les fluctuations de g.

15.3.5 Lien avec la valeur fondamentale

Lien entre la formule du prix et la valeur fondamentale vue dans le cas avec neutralité au risque ? L'équation de prix est:

$$p_t^i = E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}^i].$$

En remplaçant les prix (avec $x_t^i = p_t^i + d_t^i$) vers l'avant (et en supprimant l'indice i):

$$\begin{aligned}
p_t &= E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} d_{t+1}] + E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} p_{t+1}] \\
&= E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} d_{t+1}] + E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})} (p_{t+2} + d_{t+2})] \\
&= E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} d_{t+1}] + E_t[\beta^2 \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)} (d_{t+2} + p_{t+2})] \\
&= E_t[\sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \frac{u'(c_{t+s})}{u'(c_t)} d_{t+s}] + \lim_{s \to \infty} \beta^s \frac{u'(c_{t+s})}{u'(c_t)} p_{t+s} \\
&= E_t[\sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \frac{u'(c_{t+s})}{u'(c_t)} d_{t+s}]
\end{aligned}$$

La suppression du dernier terme écarte la possibilité de bulle pour laquelle le prix s'accroît tellement vite que les agents achètent dans le seul but de faire une plus-value.

Comment interpréter cette dernière relation ? Rappelons que le rendement sans risque entre t et $t+1$ est:

$$R_{t \to t+1}^f = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t u'(c_{t+1})}$$

Entre t et $t+s$:

$$\begin{aligned}
R_{t \to t+s}^f &= E_t[\prod_{i=1}^{s} R_{t+i-1 \to t+i}^f] \\
&= E_t[\prod_{i=1}^{s} \frac{u'(c_{t+i-1})}{\beta u'(c_{t+i})}] \\
&= E_t[\frac{u'(c_t)}{\beta^s u'(c_{t+s})}]
\end{aligned}$$

Le facteur d'intérêt $R_{t \to t+s}^f$ est le rendement d'un titre dont le prix est 1 en t et qui est remboursé s périodes plus tard, principal et intérêt (encore appelé un zéro coupon). C'est un titre sans risque de s périodes. Donc:

$$p_t = E_t[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{t+s}}{R_{t \to t+s}^f}]$$

Nous retrouvons la valeur fondamentale dans un cadre macroéconomique.

Comme pour le cas avec neutralité au risque, la valeur fondamentale est la somme actualisée des dividendes. Le facteur d'actualisation est toutefois endogène. L'agent ayant un goût pour le présent, les dividendes lointains auront un poids inférieur. L'agent n'aimant pas les fluctuations du revenu, valorisera plus les dividendes associés à une utilité marginale contemporaine élevée, soit une consommation faible. cette équation permet de valoriser n'importe quel titre de l'économie.

15.4 La frontière moyenne-variance

Dans une économie où les investisseurs sont averses au risque, ces derniers prèfèrent les actifs les moins risqués, à moins que les titres plus risqués offrent une prime de risque. Une partie du risque associée à la détention d'un actif est toutefois diversifiable au sens cette composante du risque s'évanouit une fois l'actif intégré dans un portefeuille diversifié. Le seul risque qui devrait donc être pris en compte dans la formule du prix est le risque non diversifiable.

L'analyse financière organise traditionnellement la discussion dans un schéma moyenne-variance dans lequel le rendement moyen de chaque titre est comparé à la variance de ce rendement. Appliqué au Medaf de la consommation, le risque qui a un prix est le risque qui rend la consommation plus incertaine. En particulier, nous nous demanderons si il existe un prix maximal pour le risque étant donnée la loi suivie par la consommation (reflètée par m).

Reprenons la définition d'un rendement:

$$1 = E(m\frac{x}{p}) = E(mR)$$

ainsi que la décomposition de la covariance:

$$\begin{aligned} E(mR) &= E(m)E(R) + cov(m, R) \\ 1 &= E(m)E(R) + \rho(m, R)\sigma(m)\sigma(R). \end{aligned}$$

où $\rho(m, R)$ est le coefficient de corrélation entre m et R. Nous savons que le taux sans risque est égal à l'inverse du TMS. Multiplions l'équation précédente par R^f d'un côté et par $1/E(m)$ de l'autre:

$$R^f = E(R) + \rho(m, R)\frac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R).$$

Donc:

$$\boxed{E(R) - R^f = -\rho(m, R)\tfrac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R).}$$

Nous avons une expression de la prime de risque qui dépend du risque "brut" $\sigma(R)$. La prime de risque croît inversement avec le coefficient de corrélation. En effet:

- Si $\rho(m, R) > 0$, le rendement R et m covarient positivement. Un rendement qui baisse implique un prix p qui augmente ($R = x/p$). D'un autre côté, m baisse implique c_t qui diminue (car $m_{t+1} = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$). Par conséquent, le prix de l'actif augmente quand la consommation diminue => assurance de la consommation.

- Si $\rho(m, R) < 0$, le raisonnement est symétrique => le prix de l'actif baisse quand la consommation diminue => anti-assurance.

Comme une corrélation est bornée par 1 en magnitude, en partant de la valeur maximale de $\rho(m, R) = 1$ (prime minimale et assurance complète), on trouve la **borne inférieure** pour la prime de risque et en descendant jusqu'à la valeur minimale de $\rho(m, R) = -1$ (anti-assurance), on obtient la **borne supérieure** pour la prime de risque:

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R) & \leq & E(R) - R^f \leq \dfrac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R) \\ \text{assurance "parfaite"} & \leq & \text{prime de risque} \leq \text{anti-assurance} \end{array}$$

ou encore en terme de prime de risque:

$$R^f - \frac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R) \leq E(R) \leq R^f + \frac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R)$$

On a une borne supérieure et inférieure pour la prime de risque de **n'importe quel actif** de l'économie.

Notes du graphique: moyenne $= E(R)$, écart-type $= \sigma(R)$ avec $\sigma(m)/E(m)$ fixé par la loi suivie par la consommation.

La région dans le cône satisfait la relation générale:

$$E(R) - R^f + \rho(m, R)\frac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R) = 0$$

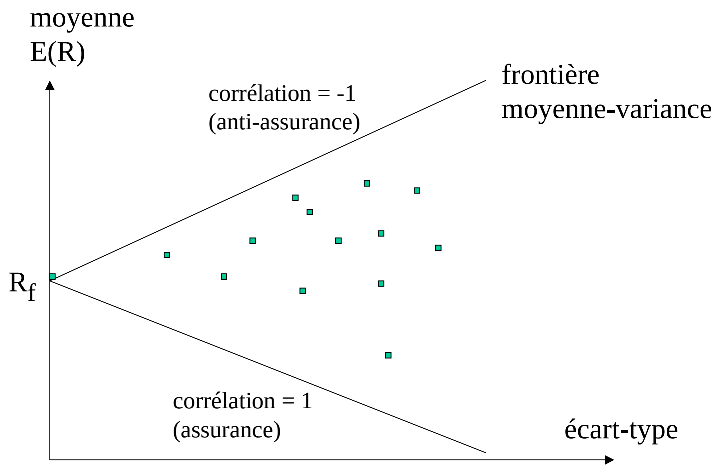
avec $\rho(m, R)$ variant entre -1 et 1.

En résumé: empiriquement, tous les actifs de l'économie devrait se trouver dans le cône. Ce cône est fixe pour une loi stochastique des TMS donnée. Leur location dépend de:

1. leur risque brut $\sigma(R)$ (ie. avant la prise en compte de la corrélation avec la consommation)

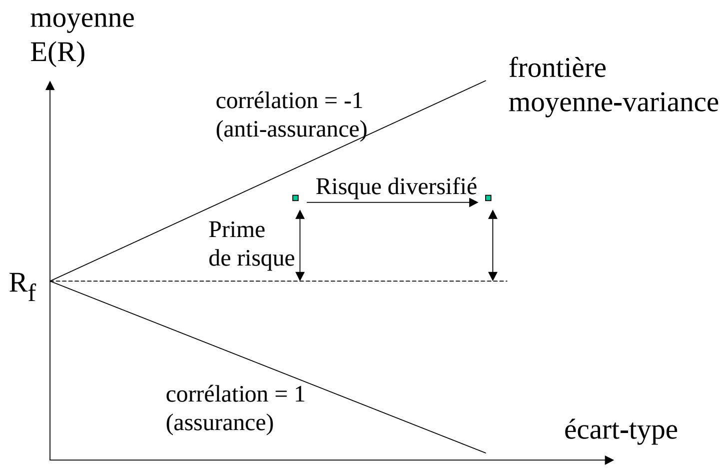
2. leur corrélation avec le TMS.

Remarques :



1. Si on trace **un trait verticale dans le plan moyenne-écart-type**, la prime de risque peut varier considérablement. Tout dépend de la corrélation avec le TMS (cf. graphique)

2. Si on trace un **trait horizontal**, on peut décomposer le risque de n'importe quel titre entre une composante diversifiable (qui ne rapporte pas de rémunération) et une composante systématique donnant lieu à rémunération. En effet, un accroissement du risque du titre à travers son écart-type ne commande aucun rendement supérieur sur la droite horizontale. Cela n'affecte donc pas le risque de consommation, ce qui illustre une **diversification complète**.

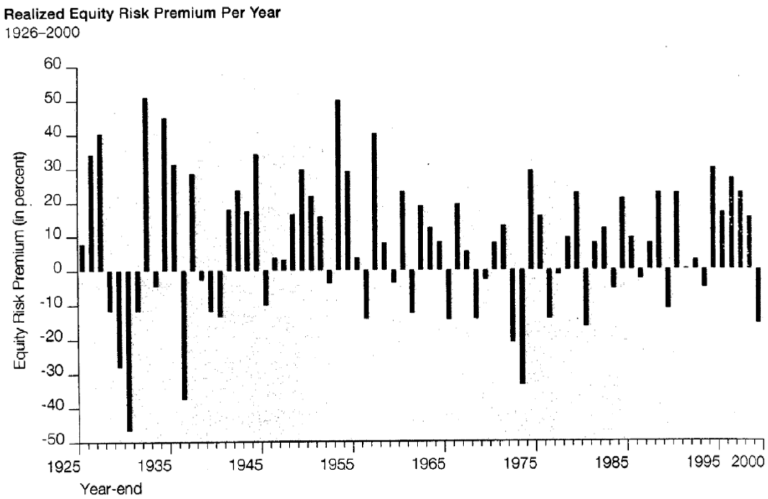


A degré de diversification égal, prime égale

15.4.1 Le paradoxe de la prime de risque

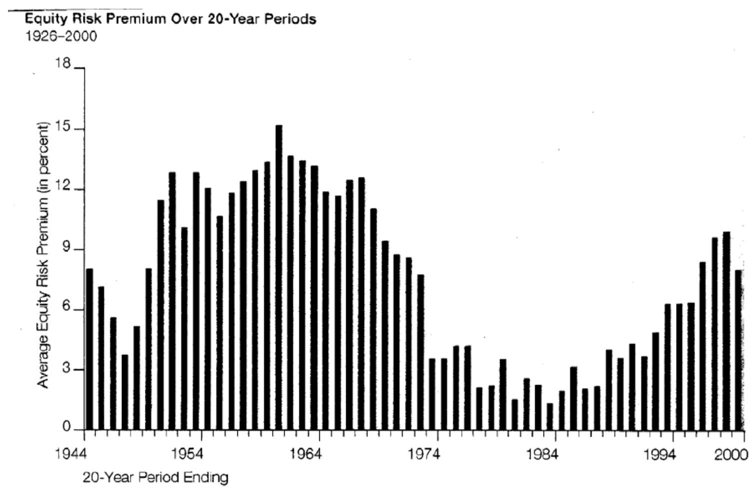
Introduction Les actions dominent statistiquement les rendements fixes et ce avec un écart important. La prime de risque est de 8% depuis l'après-guerre aux E.-U.

Sur données française, la prime de risque a été de 6,45% entre 1960 et 1992 (INSEE Première N° 827).



Les variations annuelles de la prime de risque réalisée (souces : Ibbotson)

Le graphique suivant présente la prime de risque historique telle qu'elle s'est réalisée année après année. En l'absence de prévision parfaite, la prime de risque réalisée est différente de la prime de risque ex ante, seule pertinente pour le problème étudié. Si la prime de risque est stationnaire et si les agents exploitent rationnellement toute l'information passée, les investisseurs se tromperont sur le rendement d'une année sur l'autre mais ne se tromperont pas en moyenne sur longue période. D'où l'intérêt de calculer des moyennes de long-terme, ce que fait le graphique suivant.



Les variations lissées sur 20 ans de la prime de risque réalisée (souces : Ibbotson)

Une première conséquence intéressante est que le rendement si important du marché des actions s'explique essentiellement par son risque et non par les déterminants classiques comme la productivité du capital ou le degré d'impatience des consommateurs. En effet, de tels facteurs affecteraient de la même manière le taux sans risque de l'économie.

Est-ce qu'une prime de risque aussi importante calculée à partir de moyennes implique une dominance du premier ordre (un rendement systématiquement supérieur)? Oui pour un horizon suffisamment long: **Siegel** montre que les bons du Trésor américain sont strictement dominés par les actions dès lors que l'horizon d'achat est de **30 ans et cela quel que soit la date** d'achat (ie même en achetant au pire moment) depuis 1861. Cela dit, tout le monde ne souhaite pas acheter sur une aussi longue période. Pour des horizons plus courts, le risque des actions est supérieur à celui des titres à revenus fixes.

Explication de la prime de risque dans le cadre du CCAPM:

Commençons par comparer les risques non ajustés. Aux E.U.: σ(Rdt actions) = 16% *vs* σ(Rdt bons du T) = 0,3% (Cochrane, 2001). La détention d'actions rend le revenu plus volatile et de fait peut rendre plus incertaine et plus variable la consommation. Comme déjà remarqué, plus l'écart-type de l'actif est élevé, plus la prime de risque *peut* être substantielle. L'ordre de grandeur justifie-t-il *quantitativement* la prime de risque observée?

La prime de risque dans le graphique moyenne-variance En tirant un **trait vertical** sur le graphique passant par le point R^f, on peut faire apparaître des primes de risque positives ou négatives (écart de la moyenne à R^f). Plus l'écart-type de l'actif est élevé, plus la prime de risque peut être substantielle. Mais le graphique montre visuellement une **borne supérieure pour toute prime de risque**.

Les données empiriques aboutissent-ils à une prime de risque logée dans le cône, c'est à dire ne dépassant pas la borne supérieure? Prenons la borne supérieure du cône:

$$E(R) = R^f + \frac{\sigma(m)}{E(m)}\sigma(R) \quad \text{(prix maximum du risque)}$$

La borne supérieure de la frontière moyenne-variance a une signification particulière. Elle répond à la question suivante: combien de rendement **maximum** peut-on obtenir pour une volatilité donnée d'un titre. Tous les titres de la frontière ont une corrélation parfaite avec le TMS. Ceux sur la frontière supérieure ont une **covariance maximale** avec la consommation et de ce fait commandent **la prime la plus forte**.

Supposons que la fonction d'utilité est de type puissance:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Le facteur d'actualisation stochastique est:

$$m = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta[\frac{c_{t+1}}{c_t}]^{-\gamma} = \beta g_{t+1}^{-\gamma}$$

Donc:

$$\frac{\sigma(m)}{E(m)} = \frac{\sigma(\beta g_{t+1}^{-\gamma})}{E(\beta g_{t+1}^{-\gamma})} = \frac{\sigma(g_{t+1}^{-\gamma})}{E(g_{t+1}^{-\gamma})} = \frac{\sigma[e^{-\gamma \ln g_{t+1}}]}{E[e^{-\gamma \ln g_{t+1}}]}$$

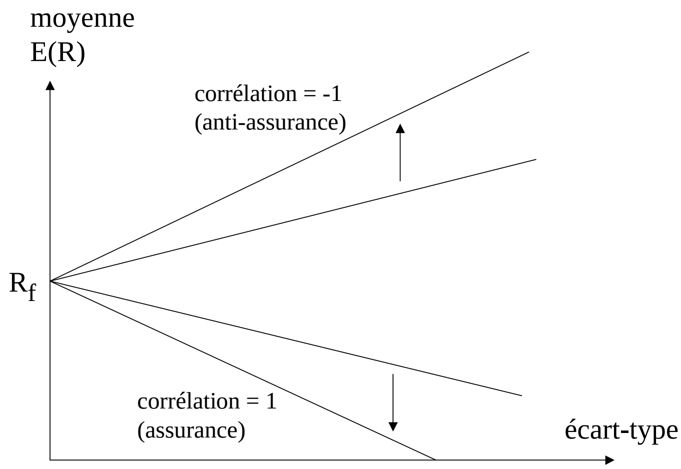
Supposons également que $\ln g_{t+1}$ suit une loi normale. On trouve alors[11]

$$\text{pente de la frontière : } \frac{\sigma(m)}{E(m)} \simeq -\sigma(-\gamma \ln g) = \gamma\sigma(\ln g)$$

Nous voyons que **la pente** de la frontière moyenne-variance est d'autant plus grande (le cône s'élargit admettant des primes de risque plus élevées) **que le taux de croissance de la consommation est volatile**. Cet effet est renforcé par le coefficient d'aversion au risque ou par l'inverse du degré de substitution intertemporelle de la consommation (DSIC).

[11] Si z est normal (voir Cochrane (2001), p23):

$$\frac{\sigma(e^z)}{E(e^z)} = \left(e^{\sigma^2(z)} - 1\right)^{1/2} \simeq -\sigma(z)$$



Effet d'un accroissement de la volatilité de la consommation

Est-ce que les titres observées appartiennent à la zone admissible? En d'autres termes, la volatilité du taux de croissance de la consommation est elle suffisante pour "ouvrir" suffisamment le cône ?

Si on prend les Etats-Unis depuis 50 ans, le rendement des actions a été en moyenne de 9% en termes réels (avant la chute depuis 2001) avec un écart-type de 16%. Le rendement réel des Bons du Trésor a été d'environ 1%:

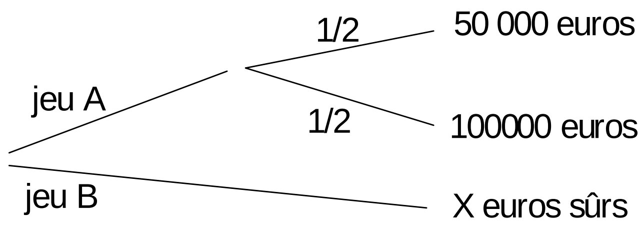
$$\begin{cases} E(R) = 0,09 \\ \sigma(R) = 0,16 \\ R^f = 0,01 \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{aligned} E(R) &\leq R^f + \gamma\sigma(\ln g)\sigma(R) \\ &\Rightarrow 0,08 \leq 0,01 + \gamma.0,01.0,16 \\ &\Rightarrow \gamma \geq 44 \end{aligned}$$

C'est une valeur excessivement élevée pour un coefficient d'aversion pour le risque, d'où le **paradoxe de la prime de risque**.

En effet, considérons la loterie très simple suivante:



Caractéristiques des jeux

Il y'a équivalence entre les loteries A et B pour les couples (X, γ) suivants:

70000	1
63000	3
58000	5
54000	10
52000	20
51000	30

Peu de personnes renonceraient à une prise de risque aussi minime dans la partie basse du tableau. Il est donc peu probable que les préférences des agents soient caractérisées par un coefficient supérieur à 10.

Conclusion: le couple moyenne variance de la Bourse américaine depuis la seconde guerre mondiale traverse la borne théorique, d'où le paradoxe de la prime de risque.

Nous nous sommes pourtant placés dans la **position la plus favorable** pour le test puisque la frontière suppose une corrélation parfaite avec le TMS. En réalité, la corrélation n'est pas parfaite: $\rho(R, g) = 0,4$ (Romer, 1997).

15.4.2 Explications possibles

Les données montrent que les investisseurs laissent une prime de risque importante sur longue période en ne surenchérissant pas sur le stock d'actions. La prime de risque est si large que la prise en compte du risque réel des actions n'explique qu'une partie infime de celle-ci.

1. Cela dépend-il de la **période d'observation**?

rendements moyens	actions	titre sans risque	prime
1802-1998 (Siegel)	7,0	2,9	4,1
1871-1926 (Shiller)	6,99	1,74	5,75
1889-2000 (Mehra-Prescott)	8,06	1,14	6,92
1926-2000 (Ibbotson)	8,8	0,4	8,4

Les chiffres varient, mais l'énigme reste. Par exemple, même avec une prime de risque réduite à 6%, le coefficient γ devrait au moins être égal à 37.

2. Barro (2005), à la suite de Rietz (1988), soutient que la prise en compte **d'événements à la fois rares et catastrophiques** pour l'économie (une météorite, une guerre nucléaire, une épidémie mondiale) permettent de résoudre l'énigme. Rietz montre qu'une chance sur 100 que la consommation baisse de 25% suffit à rationaliser la prime de risque avec $\gamma = 10$ (une borne supérieure comme nous l'avons vue). Il reste toutefois difficile d'imaginer que les titres sans risque le restent bien longtemps. Par exemple, les deux guerres mondiales se sont terminés dans une inflation si élevée qu'elle a laminé les rendements des titres sans risque en raison de leur non-indexation (Brad Delong, 2005: "*Any macroeconomic factor to drive the equity premium must therefore be a factor that leaves the real value and real return on short-period U.S. Treasury securities unaffected. But almost all true macroeconomic disasters that could have or do worse to the real value of equities are likely to produce at the very least rapid and substantial inflation, if not confiscatory taxes on or outright repudiation of government bonds.*")

4. La prise en compte des **consommations individuelles** plutôt que des consommations agrégées. Les consommations individuelles sont plus volatiles que la consommation agrégée mais peu corrélées avec les fluctuations des prix des actifs qui réagissent surtout aux risques agrégés. Les risques individuels (maladies longues, divorces etc.) apportent essentiellement du "bruit" dans la relation entre prix et consommation. La pente de la frontière moyenne-variance augmente mais ne résout pas véritablement le paradoxe.

5. L'hypothèse de consommateur représentatif. En pratique, seuls **les plus hauts patrimoines** investissent significativement dans les actions. Toutefois, les évaluations (imparfaites) des fluctuations de consommations de cette sous-population ne montrent pas de volatilité supérieure. De plus, cela n'explique pas pourquoi les actions sont si peu prisées par les revenus intermédiaires (coûts de transaction?)

6. La formation d'habitude (Boldrin, Christiano, Fisher, 2001) "Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle"):

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t - bc_{t-1})$$

=> la réduction de consommation provoquée par la baisse de la bourse est d'autant plus coûteuse que le niveau de consommation atteint précédemment était élevé.

Avec $b = 0,73$:

	données (1892-1987)	résultats du modèle
R^f	1,19 (0,81)	1,20
$E(R - R^f)$	6,63 (1,78)	6,63

L'explication est reconnue comme l'une des plus intéressante. Certains économistes pensent toutefois que le problème a été déplacé (par exemple, Kocherlakota, 1996). Pourquoi en effet, les ménages aurait une résistance aux changements d'habitude aussi forte ?

7. **Remise en cause de l'espérance d'utilité.** Certains économistes proposent de modéliser différemment les préférences, notamment en incluant une aversion aux pertes plutôt qu'aux mouvements de la consommation. Cela revient à accroître l'aversion au risque.

Pour comprendre le raisonnement, considérons un pari rapportant $a > 0$ ou $b < 0$ avec la probabilité $1/2$ ou X avec certitude. Nous cherchons X tel que les deux jeux sont équivalents:

$$0,5\frac{(w+a)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + 0,5\frac{(w+b)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{(w+X)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$X = -w + \left[0,5(w+a)^{1-\gamma} + 0,5(w+b)^{1-\gamma}\right]^{1/(1-\gamma)}$$

Espérance du jeu: $E(J) = 0,5a + 0,5b$. Equivalent certain du jeu: X. Posons $a = 10$, $b = -5$:

γ	$w = 15$	$w = 200$
$X = 0$	$\gamma \sim 1,5$	$\gamma \sim 20$

Le tableau montre que maintenir une prime monétaire constante requiert d'élever le degré d'aversion au risque quand le patrimoine augmente. Cela reflète simplement l'idée que plus la taille du risque est importante par rapport à son patrimoine total, plus l'individu est localement averse au risque.

Avec l'espérance d'utilité, l'agent ajoute les gains et soustrait les pertes de son patrimoine. Avec marchés financiers parfaits, le patrimoine pertinent à prendre en compte est la richesse courante à laquelle est ajoutée le capital humain, la somme actualisée des revenus futurs. Cette somme est typiquement importante par rapport au montant des actions détenus. Le capital humain est estimé en moyenne à plus de 60% du patrimoine total. Dans ce cas, l'exemple suggère que prendre en compte la totalité du patrimoine de l'agent rend plus difficile la résolution du paradoxe de la prime de risque.

Certains économistes pensent que les agents ne posent pas le problème du risque en accord avec les préceptes de l'espérance d'utilité. Ce ne sont pas les résultats finaux qui sont jugés mais les variations par rapport à la situation initiale. Si les agents réfléchissent en termes de pertes et de gains sans égard à leur patrimoine, cela revient ici à supposer $w = 0$:

$$U = 0,5u^{+}(a) + 0,5u^{-}(b)$$

La façon de se représenter les conséquences de ses choix a donc des conséquences importantes sur les décisions. L'aversion au risque dépend comme pour l'espérance d'utilité de la courbure de la fonction de gain et de perte. Il est généralement supposé que la désutilité de la perte croît plus vite que l'utilité du gain, ce qui tend à accroître l'aversion au risque vis à vis de paris incluant des pertes. La reformulation du problème de risque et l'hypothèse d'aversion aux pertes permettent d'obtenir des niveaux d'aversion au risque plus importants.

8. **Anticipations irrationnelles.** Supposons que les investisseurs croient (à tort) ques les variations du taux de croissance des dividendes sont permanentes: $\ln g_t = \rho \ln g_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\rho = 1$. Dans ce cas, les variations de prix sont beaucoup plus fortes que dans le cas stationnaire (le prix surréagit aux annonces de dividendes). Cela résoud à la fois l'excès de variance des prix montré par Shiller (1981) et la prime de risque puisque les actions sont maintenant considérées comme extrêmement risqués.

16 La structure par terme des taux d'intérêt

Le cadre précédent est adapté pour rendre compte des écarts de rendement à maturité identique. La question du risque se pose toutefois différemment que l'on investisse à court-terme ou à long-terme. L'interaction avec le risque de consommation sera différente. Cette question trouve une forme pure dans l'étude de la courbe des taux. La structure par terme des taux d'intérêt mesure la relation entre les taux d'intérêt sans risque qui diffèrent seulement par leur maturité.

La courbe des taux montre comment se modifie le taux d'intérêt quand la maturité s'accroît. Pour comprendre sa construction, il est utile de définir une obligation zéro coupon. Un "zéro coupon" de maturité t est un titre sans risque qui ne rapporte rien jusqu'à son remboursement t périodes plus tard. Définissons par $R^f_{0\to t}$ le rendement d'un zéro coupon d'horizon t. $R^f_{0\to t}$ est un rendement capitalisé sur t périodes et comprenant le remboursement du principal. Pour le comparer aux autres rendements, calculons son équivalent annuel noté r_t:

$$r_t = \left(R^f_{0\to t}\right)^{1/t} - 1$$

La courbe des taux entre 1 et t est alors la séquence des rendements $\{r_s; s = 1, ...t\}$.

Muni de la courbe des taux, nous pouvons reconstituer le prix de n'import quel actif à revenus fixes périodiques. En effet, un actif qui paie des revenus à plusieurs dates s'interprète comme la combinaison de coupons zéros payant un revenu terminal à chacune des dates de l'actif sous-jacent.

La courbe des taux est habituellement croissante. Cela signifie qu'il est plus rentable pour un investisseur de placer à long-terme qu'à court-terme. Entre 1952 et 1991, l'écart moyen de rendement entre un zéro coupon à 10 ans et un billet du Trésor à un mois est 1,37 pourcent (137 points). La courbe est également concave en moyenne. La pente décline avec l'horizon. Pour la même période, l'écart moyen de rendement en points (un point = 1/100 de pourcentage) avec un billet du Trésor à un mois est:

3 mois	un an	deux ans	dix ans
33	77	96	137

Cette relation peut toutefois ponctuellement "s'inverser" et devenir décroissante, notamment avant les récessions. La formation de la courbe a suscité de nombreuses interprétations sur ses origines.

"L'hypothèse des anticipations" établit un lien entre une obligation à long-terme et une séquence d'obligations à court-terme. En effet, les investisseurs devraient continuellement arbitrer entre les différentes maturités, soit en empruntant à court-terme et en placant à long-terme, soit en faisant l'inverse. Il devrait donc être équivalent, au moins en espérance, de placer un euro à cinq ans ou de renouveler chaque année l'acquisition d'une obligation à un an. Une courbe croissante Une courbe des taux croissante contient la prévision d'une courbe des taux plus haute dans l'avenir. Cela signifie que les taux de court-terme vont augmenter. Mais cela n'explique pas pourquoi cette situation est la norme. Les taux anticipés devraient parfois augmenter, parfois baisser.

"L'hypothèse des anticipations" évacue la question du risque. Les titres à long-terme sont généralement jugés plus risqués que les titres à court-terme.

Hicks (1946) ne remet pas en cause cette hypothèse mais introduit une préférence pour la liquidité. Les obligations à long-terme sont moins liquides et plus risqués que les obligations à court-terme. Cela provient du fait que le risque de prix tend à s'accroître avec l'horizon. Si les investisseurs préfèrent la liquidité, la détention d'actifs longs nécessite une "prime de terme" qui s'accroît avec la maturité.

Culbertson (1957) avance une raison différente, fondée sur une segmentation des marchés des titres en fonction de leur maturité. Certains investisseurs planifient des dépenses à court-terme et donc opèrent sur le marché correspondant. D'autres prévoient des dépenses à plus long-terme et demandent des titres à maturité similaire. Les taux d'intérêt sont fixés selon des forces relativement séparées.

Modigliani et Sutch (1966) proposent une théorie similaire basée sur un "habitat préféré" des épargnants en fonction de la maturité. Ils reconnaissent toutefois une substituabilité significative entre maturités proches. Les investisseurs peuvent être "tentés de sortir de leur habitat si les rendements attendus sont attractifs". La théorie de Hicks peut être d'ailleurs vue comme un cas particulier de celle de Modigliani et Sutch si tous les agents ont une préférence pour le futur proche plutôt que lointain.

Enfin, les facteurs monétaires devraient également être pris en compte dans la mesure où la courbe des taux est fixée en valeur nominale. Si l'inflation anticipée est supérieure à long-terme qu'à court-terme, la courbe des taux se redresse afin de compenser la dépréciation nominale croissante.

Dans la suite, nous reprenons ces différentes explications (anticipations changeantes avec l'horizon, aversion pour le risque et incertitude croissante avec la maturité, condition de non arbitrage) dans le modèle du MEDAF de la consommation précédemment étudié.

Un zéro coupon sur une période rapporte $R^f_{0\to 1}$ à la date 1 contre le paiement d'une unité de monnaie à la date initiale. Nous savons que son prix est:

$$R^f_{0\to 1} = \frac{u'(c_0)}{\beta E_0 u'(c_1)}$$

Un zéro coupon sur deux périodes rapporte $R^f_{0\to 2}$ à la date 2 contre le paiement d'une unité de monnaie à la date initiale. En se servant de l'équation générale de prix

$$p^i_0 = E_0[\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)}(p^i_1 + d^i_1)]$$

développé une période vers l'avant:

$$\begin{aligned} p^i_0 &= E_0[\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} d^i_1] + E_0[\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} \beta \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)}(p^i_2 + d^i_2)] \\ &= E_0[\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} d^i_1] + E_0[\beta^2 \frac{u'(c_2)}{u'(c_0)}(d^i_2 + p^i_2)] \end{aligned}$$

La valorisation d'un zéro coupon payable dans deux ans conduit à poser $p^i_0 = 1$, $d^i_1 = 0$, $p^i_2 + d^i_2 = R^f_{0\to 2}$:

$$1 = E_0[\beta^2 \frac{u'(c_2)}{u'(c_0)} R^f_{0\to 2}]$$

Il en découle:

$$R^f_{0\to 2} = \frac{u'(c_0)}{\beta^2 E_0[u'(c_2)]}$$

De la même manière, on peut montrer que le taux capitalisé à l'horizon t est:

$$R^f_{0\to t} = \frac{u'(c_0)}{\beta^t E_0[u'(c_t)]}$$

Le rendement total annuel équivalent est la moyenne géométrique noté R_t:

$$R_t = \left(R^f_{0\to t}\right)^{1/t} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{u'(c_0)}{E_0[u'(c_t)]}\right)^{1/t}$$

En posant $\beta = e^{-\delta}$:

$$\ln R_t = \delta - \frac{1}{t}\ln\left(\frac{E_0[u'(c_t)]}{u'(c_0)}\right)$$

Cette formule se retrouve dans tous les livres de référence en finance (par exemple Cochrane "Asset pricing", 2001). Elle fonde la théorie moderne de la structure par terme des taux d'intérêt initiée par Vasicek (1977) et Cox, Ingersoll et Ross (1985).

Supposons que $u'(c_t) = c_t^{-\gamma}$ où γ est l'indice d'aversion relatif au risque:

$$E\frac{u'(c_t)}{u'(c_0)} = E\left(\frac{c_t}{c_0}\right)^{-\gamma} = E\left(e^{-\gamma \ln g_t}\right)$$

$\ln g_t$ est la croissance de la consommation cumulée à l'horizon t:

$$g_t = \frac{c_t}{c_0} = \frac{c_t}{c_{t-1}}\frac{c_{t-1}}{c_{t-2}}...\frac{c_1}{c_0}$$

ou en passant au log:

$$\ln g_t = \sum_{i=0}^{t-1} \ln g_{i\to i+1}$$

avec $\ln g_{i\to i+1} = \ln(c_{i+1}/c_i + 1 - 1) \approx (c_{i+1} - c_i)/c_i$ le taux de croissance annuel sur la période spécifiée. Je suppose de plus que $\ln g_{i\to i+1}$ suit une loi normale. $\ln g_t$ suit donc également un loi normale. Si z est normal:

$$E(e^z) = e^{E(z)-\frac{1}{2}\sigma^2(z)},$$

d'où:

$$E\frac{u'(c_t)}{u'(c_0)} = e^{-\gamma E(\ln g_t)+\frac{\gamma^2}{2}\sigma^2(\ln g_t)}$$

Le taux d'intérêt est approximativement égal à $\ln R_t = \ln(1 + r_t) \approx r_t$:

$$r_t \approx \delta + \frac{\gamma}{t}E\left(\ln g_t\right) - \frac{\gamma^2}{2t}\sigma^2(\ln g_t)$$

De plus, si les taux de croissance de la consommation (approximés par $\ln g_{i\to i+1}$) sont indépendants entre deux dates, de moyenne μ et de variance V:

$$E\left(\ln g_t\right) = t\mu$$

$$\sigma^2\left(\ln g_t\right) = tV$$

Le taux de croissance de long-terme attendu est simplement la somme des taux de croissance annuels et la variance de long-terme croît linéairement avec l'horizon.

Nous obtenons alors la formule standard pour la courbe des taux d'intérêt:

$$r \approx \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2}{2}V$$

La courbe des taux est plate: l'horizon n'a pas d'impact sur le taux d'intérêt. Le calcul montre qu'à la fois l'effet richesse et l'effet précaution sont indépendants de l'horizon temporel. L'analyse qui a été faite pour le taux sans risque à une période s'applique aux taux à plus longues échéances.

Pour comprendre le raisonnement, reprenons le lien entre rendement total capitalisé et rendement ramené à une période:

$$1 + r_t = R_t = \left(R^f_{0\to t}\right)^{1/t}$$

La relation entre les taux d'intérêt est approximée par:

$$r_t \sim \frac{r^f_{0\to t}}{t}$$

Plus la consommation est lointaine, plus elle sera importante en raison de la croissance: $E(\ln g_t) = t\mu$. L'incitation à épargner décroît avec l'horizon car le niveau de vie augmente, d'où une pression à la hausse sur $r^f_{0\to t}$. Cette pression à la hausse est elle-même dans la formule proportionnelle avec l'horizon t. Cet effet n'est donc pas visible sur la courbe des taux, ni à la hausse ni à la baisse.

D'autre part, quand les taux de croissance sont indépendants temporellement, la variance de la consommation future croît avec l'horizon (Samuelson):

$$\sigma^2(\ln g_t) = tV$$

Par conséquent, plus la consommation est lointaine, plus elle est incertaine. L'effet précaution qui en résulte implique un désir de substitution entre la consommation présente et la consommation future à l'horizon t, ce qui cette fois encourage l'épargne à cet horizon. L'incitation à épargner croît par conséquent avec l'horizon, d'où une pression croissante à la baisse sur $r^f_{0\to t}$. Cette pression à la baisse est elle-même proportionnelle avec l'horizon t. Cet effet n'est donc pas non plus visible sur la courbe des taux.

En pratique, la courbe des taux est généralement croissante. Comment l'interpréter ?

Empiriquement, l'hypothèse d'indépendance des taux de croissance de la consommation est critiquable. Quelles conséquences ?

Exemple: modèle à deux périodes.

$$g_2 = \frac{c_2}{c_0} = \frac{c_2}{c_1}\frac{c_1}{c_0}$$

$$\ln g_2 = \ln\frac{c_2}{c_1} + \ln\frac{c_1}{c_0}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(\ln g_2) &= 2V + cov(\ln\frac{c_2}{c_1}, \ln\frac{c_1}{c_0}) \\ &< 2V\end{aligned}$$

Si le taux de croissance suit un retour vers la moyenne ($cov < 0$), la variance du taux de croissance croît moins que linéairement avec l'horizon: l'effet richesse fait plus que compenser l'effet précaution. La courbe des taux devient croissante avec l'horizon. Une courbe croissante signale une croissance économique sans que la variance n'augmente proportionnellement.

Enfin, on observe avant chaque récession, un retournement de la courbe des taux: les taux très courts passent au dessus des taux longs => la courbe devient décroissante.

Chart 1

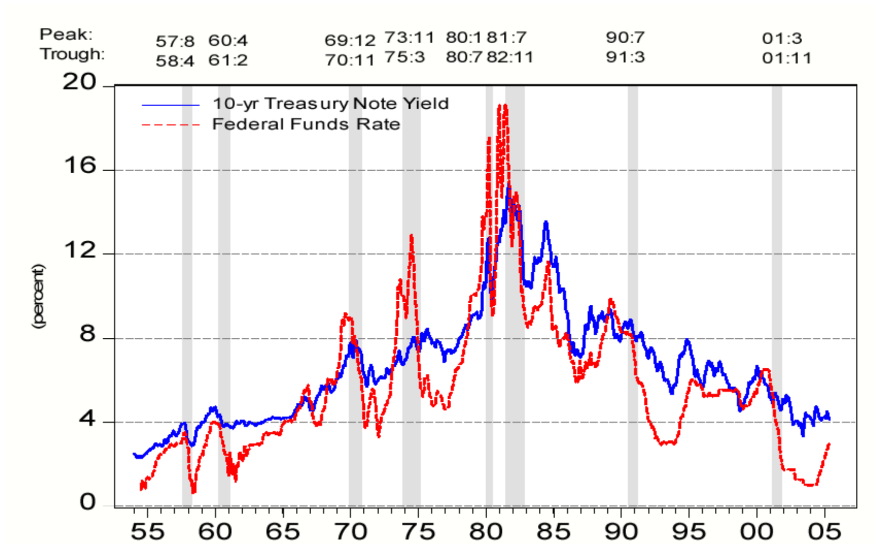


Figure 1: Le taux à court-terme dépasse le taux à long-terme avant chaque récession (zones ombragées)

Reprenons le modèle avec taux de croissance variable (mais variance identique):

$$\overline{\mu_t} = \frac{1}{t} E\left(\ln g_t\right) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \mu_i$$

La courbe des taux correspondantes est:

$$\ln R_t = \delta + \gamma \overline{\mu_t} - \frac{\gamma^2}{2} V$$

Si le taux de croissance futur proche est plus faible que le taux de croissance futur lointain, la courbe des taux est croissante: le ménage va plus facilement épargner à court-terme qu'à long-terme: les taux croissent. Le modèle prédit que la courbe s'inverse à la fin des récessions, quand la reprise désincite les ménages à épargner, ce qui est contre-factuel.

Il semble par conséquent qu'il faille introduire des rigidités nominales pour comprendre cette régularité empirique. Une courbe de taux inversée, c'est à-dire descendante sur sa partie 0-10 ans, indique que l'argent à court terme est plus cher que l'argent à long terme. C'est le cas :

* quand la politique monétaire est particulièrement restrictive (taux d'intérêt à court terme élevés fixés par la banque centrale dans le cadre de la lutte contre l'inflation, par exemple);

* ou quand le marché anticipe une récession dans le futur, qui donc entrainera un assouplissement des taux courts.

Part III
3ème partie: l'investissement

L'investissement est appelé Formation Brute de Capital Fixe par la Comptabilité Nationale (FBCF). La FBCF est un flux qui comptabilise l'ensemble des acquisitions d'actifs fixes, matériels ou immatériels par les résidents. Un actif est fixe si son utilisation dans le processus de production dépasse l'année.

17 Les faits

17.1 Part dans la demande finale

Année 2004: $Q = 1648$ Mds d'euros

$$Q\ (100) + M\ (29) = C\ (80) + I\ (19{,}2) + X\ (26)$$

L'investissement total:

$$I\ (100) = I_e\ (56) + I_m\ (27) + I_p\ (17)$$

17.2 Comportement au cours du cycle

Le caractère procyclique de l'investissement (cf. graphique distribué). Sur données françaises:

Période	I/Y	$\sigma\,(\Delta Y_t)$	$\sigma\,(\Delta I_t)$	$corr(\Delta Y_t, \Delta I_t)$
$1970-95$	23%	0,66	1,61	0,67

=> contribue aux fluctuations de la demande. Relation robuste aux changements de périodes et de pays.

17.3 Etudes microéconomiques

L'investissement est une décision ponctuelle. Les études sur panel d'établissements montrent que les entreprises n'ajustent pas graduellement leur investissement en équipement mais procédant par ajustements larges et ponctuels.

Doms et Dunn (1994) trouvent par exemple sur données américaines que plus de la moitié des établissements connaissent une croissance du capital proche de 50 % en une seule année sur les 17 années répertoriées.

=> un pic macroéconomique d'investissement est d'abord un accroissement du nombre d'entreprises qui investissent.

18 Quelques théories basiques

18.1 L'accélérateur et l'influence de la demande

L'accélérateur d'investissement (Aftalion (1908) et Clark (1917)[12]):

$$K = v.Q$$

avec v fixe:

1. hypothèse de stabilité de la relation entre le stock de capital et la production (contrainte technologique).
2. contrainte sur les débouchés des entreprises avec le bouclage macroéconomique par l'identité comptable $Y = Q$.

Pour passer d'une équation de capital à une équation d'investissement, il faut différencier la relation:

$$\begin{aligned} I &= dK = v.dQ \\ &\Rightarrow dI = v.d^2Q \end{aligned}$$

Résultat: l'investissement varie avec les accélérations et les décélérations de la production/demande. Or, en général, les variations sont plus volatiles que les niveaux et les variations de variations plus volatiles que les variations qui les engendrent => explique potentiellement le fait que l'investissement est plus volatile que la production.

Testée sur données, la relation aboutit toutefois à un **excès de volatilité** par rapport aux données (Tinbergen(1939)). D'où par la suite des versions adoucies de l'accélérateur.

L'accélérateur **flexible** de Chenery (1952) et Koyck (1954):

$$I = \alpha v.dQ + (1 - \alpha)I_{-1}$$

=> combinaison convexe entre les variations de la demande/production (l'accélérateur simple) et les niveaux passés d'investissement (le frein). En recherchant la meilleure pondération entre ces deux facteurs, le modèle économétrique arrive à une relation empirique correcte.

Théorie partielle: ne prend pas en compte les déterminants du coût du capital comme le taux d'intérêt ou le progrès technique. Les études économétriques montrent que l'investissement ne dépend qu'en partie de la demande et que la qualité de la relation est variable au cours du temps.

[12] La théorie qui relie l'investissement et la demande globale est antérieure à Keynes. D'ailleurs ce dernier ne la défend pas et adhère à la vision classique de l'investissement dont le volume est issu de la comparaison entre la productivité marginale du capital et le taux d'intérêt.

18.2 L'indicateur synthétique de Tobin: le "Q"

Brainard et Tobin (1968)[13] et Tobin (1969)[14] notent qu'à long-terme, le prix du capital p doit être égal à son coût de remplacement c. Le ratio des deux est appelé le q de Tobin: $q = p/c$. A titre d'illustration, partons d'un stock de capital installé dans l'entreprise de $K = 1000$. La valeur V^c de l'entreprise estimée à la revente est égale à $V^c = 1000c$. Le capital installé a également une valeur de marché si l'entreprise est côtée. Soit $p = V^m/1000$ le prix de marché unitaire du capital. Si la valeur de marché V^m diffère à un instant donné de la valeur comptable V^c, cela revient à $q = p/c \neq 1$. **L'investissement va alors varier** et rétablir l'égalité:

- Si $V^m > V^c$, $p > c$ ou $q > 1$, l'entreprise peut émettre de nouvelles actions Δq au prix p, acheter du capital au coût c et faire un bénéfice égal à $(V^m - V^c)\Delta q$.
- Inversement, si $V^m < V^c$, $p < c$ ou $q < 1$, l'entreprise vend une partie de son capital physique, ce qui accroît sa valeur boursière.

C'est une simple **relation d'arbitrage** entre deux types d'actifs:

> The market valuation of equities, relative to the replacement cost of the physical assets they represent, is the major determinant of new investment. Investment is stimulated when capital is valued more highly in the market than its costs to produce it, and discouraged when its valuation is less than its replacement cost. (Brainard et Tobin (1968), p.103)

A partir de ce raisonnement, **deux conclusions:**

1. Le q de Tobin est une mesure synthétique de la rentabilité du capital : $I = \varphi(q)$
2. L'investissement varie positivement avec la variable q.

Trois remarques:

1. La théorie de Tobin est une théorie "complète" **sans a priori** sur les déterminants de la demande de capital: la variable q recense tous les facteurs de l'investissement, qu'ils soient de type néoclassique (rentabilité du capital, taux d'intérêt, etc, ...) ou liés à des facteurs de demande.

[13] William C. Brainard, James Tobin, "Pitfalls in Financial Model Building", The American Economic Review, Vol. 58, No. 2, Papers and Proceedings of the Eightieth Annual Meeting of the American Economic Association. (May, 1968), pp. 99-122.

[14] James Tobin, "A General Equilibrium Approach To Monetary Theory", Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 1, No. 1. (Feb., 1969), pp. 15-29.

2. Le raisonnement d'arbitrage est un raisonnement qui porte sur la dernière marge de capital. D'où le nom de *q marginal*: c'est le ratio de la valeur de marché d'une unité additionnelle de capital et de son coût de remplacement.

3. Ce que l'on observe est toutefois le *Q moyen*: le ratio de la valeur de marché du capital et de son coût de remplacement. Les études économétriques ont donc substitué la première variable inobservable par la seconde observable, en faisant l'hypothèse que le Q moyen approxime correctement le q marginal.

19 Le modèle intertemporel d'investissement

19.1 Le modèle

Dans un cadre explicitement temporel, les stocks de capital sont reliés les uns aux autres par la loi d'évolution:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t^b$$

avec:

- K_t le capital
- δ: le coefficient d'usure du capital
- I_t^b: l'investissement brut, c'est à dire sans prendre en compte la dépréciation du capital.

L'investissement brut ne correspond pas à la véritable augmentation du capital. L'investissement **net** de la dépréciation est:

$$I_t = I_t^b - \delta K_t$$

La contrainte d'accumulation devient :

$$K_{t+1} = K_t + I_t.$$

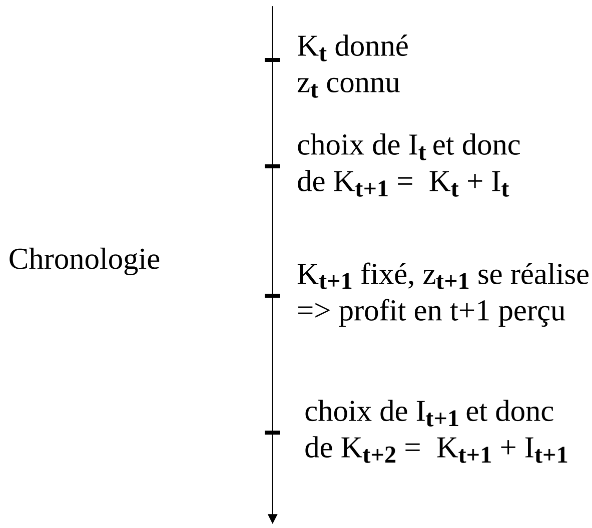
L'entreprise choisit son niveau d'investissement de sorte que la valeur de marché de l'entreprise soit maximisée. La valeur de marché est également la valeur fondamentale c'est à dire la somme actualisée de des profits de l'entreprise:

$$\left\{ \begin{array}{c} \max V_t = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a^i E_t(\pi_{t+i}) \\ \text{s.c.:} \left\{ \begin{array}{c} \pi_t = z_t F(K_t) - (I_t + \delta K_t) - C(\frac{I_t}{K_t})K_t \\ K_{t+1} = K_t + I_t \end{array} \right. \\ z_t,\ K_t \text{ connus et donnés en } t \end{array} \right.$$

avec:

- prix relatif du capital par rapport au bien : $p_K = 1$.
- $z_t F(K_t)$ la fonction de production avec z_t le niveau de productivité (le niveau futur $\widetilde{z}_{t+i}$ fluctue de manière aléatoire)
- $a = 1/(1+r)$ le facteur d'actualisation de l'entreprise
- $C(\frac{I_t}{K_t})K_t$: les coûts d'ajustement du capital qui sont supposés:
  - une fonction croissante du taux d'investissement net: $C'(\frac{I_t}{K_t}) > 0$ <=> désorganisation transitoire liée à l'installation de nouveaux équipements, formation des salariés aux nouvelles machines, coûts de mis au rebut en cas de désinvestissement.
  - une fonction convexe: $C''(\frac{I_t}{K_t}) > 0$ => incite l'entreprise à étaler l'investissement au cours du temps afin de réduire les coûts totaux d'ajustement.
  - La fonction de coût d'ajustement est de plus **homogène de degré un**: $C(\lambda I, \lambda K) = C(\frac{\lambda I}{\lambda K})\lambda K = \lambda C(I, K)$. => permet d'éliminer des effets d'échelle peu plausibles. Une grande entreprise ne bénéficiera pas d'économies d'échelle par rapport à une entreprise plus petite dont le stock installé est inférieur: si la taille est multipliée par deux, les coûts sont multipliés par deux.
- π_t : le profit soit les revenus de la production nets des dépenses en investissement et des coûts d'ajustement du capital. Les hypothèses habituelles de concavité de la fonction de profit sont respectées.

Chronologie des choix d'investissement:



Séquences des actions et des événements

Ecriture du Lagrangien à la date t:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_t &= \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t \left\{ \widetilde{z}_{t+i} F(K_{t+i}) - I_{t+i} - \delta K_{t+i} - C(\frac{I_t}{K_t}) K_t \right\} \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} E_t \left\{ \lambda_{t+i} \left(I_{t+i} + K_{t+i} - K_{t+1+i} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

Récriture du multiplicateur de Lagrange (sans perte de généralité):

$$q_{t+i} = a^{-i} \lambda_{t+i}$$

D'où:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t \left\{ \widetilde{z}_{t+i} F(K_{t+i}) - I_{t+i} - \delta K_{t+i} - C(\frac{I_{t+i}}{K_{t+i}}) K_{t+i} + q_{t+i} (I_{t+i} + K_{t+i} - K_{t+1+i}) \right\}$$

Développement des deux premiers termes du Lagrangien:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_t &= z_t F(K_t) - I_t - \delta K_t - C(\frac{I_t}{K_t})K_t + q_t\left[I_t + K_t - K_{t+1}\right] \\
&\quad + aE_t\left\{\widetilde{z}_{t+1}F(K_{t+1}) - I_{t+1} - \delta K_{t+1} - C(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})K_{t+1} + q_{t+1}\left[I_{t+1} + K_{t+1} - K_{t+2}\right]\right\} \\
&\quad + ...
\end{aligned}
$$

Condition du premier ordre (CPO) sur l'investissement:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial I_t} = -1 - C'(\frac{I_t}{K_t}) + q_t = 0$$

$$q_t = 1 + C'(\frac{I_t}{K_t}) \tag{12}$$

D'où le taux d'investissement:

$$\frac{I_t}{K_t} = \varphi(q_t - 1)$$

avec $\varphi(.)$ une fonction croissante (comme son inverse $C'(.)$).

Condition du premier ordre (CPO) sur le capital:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial K_{t+1}} = 0 \Rightarrow q_t = aE_t\left\{\frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + q_{t+1}\right\} \tag{13}$$

avec l'accroissement instantanné du profit de l'entreprise:

$$\frac{\partial \pi_{t+1}}{\partial K_{t+1}} = \widetilde{z}_{t+1}F'(K_{t+1}) - C(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}) + C'(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta$$

L'équation (13) montre que toute unité de capital supplémentaire (c'est à dire tout investissement additionnel) **accroît à la marge le profit** actuel net des coûts d'ajustement ($\partial \pi_{t+1}/\partial K_{t+1}$), et permet un **accroissement marginal** q_{t+1} du gain lié à la revente de l'entreprise à la période suivante. En effet q_{t+1} reprèsente l'accroissement de la valeur boursière en $t+1$ (voir l'équation (14) qui suit).

En itérant vers l'avant et en supposant que la variable q_t ne croît pas plus vite que le taux d'intérêt ($\lim a^h E_t(q_{t+h}) = 0$ quand $h \to \infty$):

$$q_t = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E_t\left(\frac{\partial \pi_{t+i}}{\partial K_{t+i}}\right) \tag{14}$$

Le multiplicateur de Lagrange q_t s'interprète comme la somme actualisée des bénéfices marginaux tirée de l'utilisation d'une unité supplémentaire de capital dans le processus de production. C'est la productivité marginale du capital dans un cadre intertemporel.

La valeur boursière d'une entreprise étant la somme actualisée de ses profits intertemporels (théorie de la valeur fondamentale sans bulle), la valeur de q_t indique par conséquent de combien la valorisation boursière augmente quand l'entreprise met en place une unité supplémentaire de capital.

Cela correspond étroitement au Q de Tobin dans sa version marginale: $q = p/c$ avec c le prix du stock de capital normalisé à un. Selon le raisonnement de Tobin, une entreprise devrait investir dès lors que cet indicateur est supérieur à l'unité. Est-ce le cas ici?

Pour le voir, nous pouvons éliminer le multiplicateur de Lagrange des équations (12) et (14). Nous obtenons l'équation déterminant le stock de capital:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a^i E_t \left(\frac{\partial \pi_{t+i}}{\partial K_{t+i}} \right) = 1 + C'(\frac{I_t}{K_t})$$

Le stock optimal égalise la productivité marginale du capital à son coût marginal. Nous voyons que le raisonnement de Tobin s'applique à un cas sans coûts d'ajustement. dans ce cas, on a bien l'égalité:

$$q = \frac{p}{c} = \sum_{i=1}^{\infty} a^i E_t \left(\frac{\partial \pi_{t+i}}{\partial K_{t+i}} \right) = 1$$

L'entreprise sélectionne son stock optimal de capital K^* de telle manière à maintenir à un le q de Tobin. Un q de Tobin supérieur à l'unité signale des perspectives de profits futurs que l'entreprise exploite en investissant. En cas de coûts marginaux d'ajustement positifs, l'entreprise peut rester durablement éloigné de sa cible de capital optimal K^*. Le q de Tobin peut donc dévier durablement de l'unité dans ce cas.

En l'absence de coûts d'ajustement, on dispose d'une **théorie du stock optimal** à défaut d'une théorie de l'investissement en tant que telle. Le stock de capital s'ajuste instantanément à tout écart entre son coût marginal et sa rentabilité marginale. Le stock est la seule variable pertinente du problème. L'investissement se réduit simplement à l'écart entre le stock optimal entre deux dates. Haavelmo (1960) souligne les insuffisances d'un tel modèle:

> The demand for investment cannot simply be derived from the demand for capital... I think the sooner this naive, and unfounded theory of the demand for investment shedule is abandoned, the sooner we shall have a chance of making some real progress in constructing more powerful theories to deal with the capricious short-run variations in the rate of private investment.

L'hypothèse de coûts d'ajustement permet d'enrichir la dynamique de l'investissement, et comme nous le verrons, améliore l'estimation économétrique de la demande d'investissement.

19.2 Disgression: le modèle à deux périodes

Nous pouvons faire un lien avec le modèle statique d'investissement, plus familier. Soit le modèle à deux périodes suivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &= -cI - C(\frac{I}{K_0})K_0 + \frac{1}{1+r}E_0[\widetilde{z}_1 F(K_1)] + q(K_0 + I - K_1) \\ & \quad K_0 \text{ donné} \end{aligned}$$

avec c le prix du capital normalisé à un dans la suite. Cela revient au modèle précédent avec une dépréciation complète du capital de seconde période. Ecrivons les deux conditions du premier ordre (CPO):

CPO sur l'investissement:

$$q = 1 + C'(\frac{I}{K_0})$$

CPO sur le stock:

$$q = \frac{1}{1+r}E_0\left[\widetilde{z}_1 F'(K_1)\right]$$

Nous voyons que le q de Tobin est simplement la productivité marginale du capital. Le stock optimal égalise la productivité marginale du capital à son coût marginal:

$$E_0\left[\widetilde{z}_1 F'(K_1)\right] = 1 + C'(\frac{I}{K_0})$$

Cette condition d'optimalité est à comparer avec celle obtenue dans le modèle avec horizon infini dans lequel le choix d'accroître d'une unité le capital aujourd'hui augmente durablement le stock de capital et affecte par conséquent les profits futurs.

19.3 Equivalence entre le q marginal et le q moyen

Le modèle néoclassique intertemporel de l'investissement délivre un raisonnement identique à celui de Tobin: (i) l'entreprise devrait comparer le bénéfice marginal de l'investissement à son coût, (ii) la meilleure mesure du bénéfice intertemporel de l'investissement est l'accroissement boursier. C'est un raisonnement à la marge qui est difficile à mettre en oeuvre empiriquement, d'où le remplacement du q marginal par le q moyen dans les études économétriques de l'investissement.

Le modèle intertemporel de l'investissement indique cependant sous quelles conditions l'équivalence entre le q marginal et le q moyen est valide:

Proposition. Le q *moyen* est équivalent au q *marginal* si (Hayashi, 1982):

1. La fonction de production est **homogène de degré un** dans le capital : $F(\lambda K) = \lambda F(K) \Rightarrow F'(K)K = F(K)$

2. La fonction de coût d'ajustement est homogène de degré un: $C(\lambda I, \lambda K) = C(\frac{\lambda I}{\lambda K})\lambda K = \lambda C(I, K)$

3. Concurrence pure et parfaite sur les marchés des biens et des facteurs,

4. La loi des espérances itérées est vérifiées: $E_t[E_{t+1}(x_{t+2})] = E_t(x_{t+2})$,

5. La condition de transversalité suivante est satisfaite : $\lim a^h E_t(q_{t+h}K_{t+h+1}) = 0$ si $h \to \infty$.

Démonstration. Reprenons la condition du premier ordre en K_{t+1} et multiplions des deux côtés par le K_{t+1} (l'absence d'indice renvoie à la période $t+1$):

$$q_t K = aE_t[\tilde{z}F'(K)K - C(\frac{I}{K})K + C'(\frac{I}{K})I - \delta K + qK]$$

en remplaçant à droite K_{t+1} $(= K)$ par $K_{t+2} - I_{t+1}$ (loi d'évolution du capital) puis q par $1 + C'(I)$ (CPO sur l'investissement):

$$\begin{aligned}
q_t K &= aE_t[\tilde{z}F'(K)K - C(\frac{I}{K})K + C'(\frac{I}{K})I - \delta K + q(K_{t+2} - I)] \\
&= aE_t[\tilde{z}F'(K)K - C(\frac{I}{K})K + C'(\frac{I}{K})I - \delta K - qI)] + aE_t[qK_{t+2}] \\
&= aE_t[\tilde{z}F'(K)K - C(\frac{I}{K})K + C'(\frac{I}{K})I - \delta K - (1 + C'(\frac{I}{K}))I] + aE_t[qK_{t+2}] \\
&= aE_t[\tilde{z}F'(K)K - C(\frac{I}{K})K - \delta K - I] + aE_t[qK_{t+2}]
\end{aligned}$$

enfin, en itérant vers l'avant le terme $q_{t+1}K_{t+2}$:

$$q_t K_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t \left[\tilde{z}_{t+1+i}F'(K_{t+1+i})K_{t+1+i} - \delta K_{t+1+i} - I_{t+1+i} - C(\frac{I_{t+1+i}}{K_{t+1+i}})K_{t+1+i} \right]$$

en supposant la condition de transversalité vérifiée:

$$\lim a^h E_t(q_{t+h}K_{t+h+1}) = 0 \text{ si } h \to \infty$$

ou encore l'absence de bulles sur la valeur du capital:

$$\lim a^h E_t(V_{t+h+1}) = 0 \text{ si } h \to \infty.$$

nous obtenons:

$$\begin{aligned}
q_t K_{t+1} &= \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t(\pi_{t+1+i}) \\
&= V_{t+1}
\end{aligned}$$

=> le q marginal est donc égal au q moyen:

$$q_t = \frac{V_{t+1}}{K_{t+1}}$$

Q.E.D.

Discussion de l'équivalence entre le q marginal et le Q moyen

Ce résultat d'équivalence est important d'un point de vue pratique puisque les études économétriques utilisent abondamment le q moyen à la place du q marginal, plus difficile à mesurer.

L'hypothèse de rendements d'échelle constants dans un modèle à un seul facteur, le capital, est une simplification utile mais se reformule facilement dans un modèle à deux facteurs. Cela revient à supposer des rendements d'échelle constants sur l'ensemble des facteurs de production, hypothèse communément adoptée dans les études sur la croissance. En incluant le facteur travail, noté L, la condition de linéarité sur le capital $zF'(K)K = zF(K)$ devient:

$$zF_K(K,L)K + zF_L(K,L)L = zF(K,L)$$

ce qui est vérifié dans les cas de rendements d'échelle constants $zF(\lambda K, \lambda L) = \lambda zF(K,L)$ et de concurrence parfaite (dans ce cas la rémunération des facteurs à leur productivité marginale,$w = zF_L(K,L)$, épuise le produit). Tous les résultats précédents sont conservés.

Associée à l'hypothèse d'homogénéité de degré un de la fonction de coût d'ajustement, des rendements d'échelle unitaire dans la production impliquent que la rentabilité d'une unité supplémentaire de capital ne dépend pas de la taille de l'entreprise mesurée par son stock de capital. Il est alors équivalent de mesurer la rentabilité moyenne du capital total en place ou d'évaluer la rentabilité marginale d'une unité additionnelle de capital.

19.4 Application

Exemple d'un accroissement de la productivité du capital.

Chronologie d'un choc unique permanent et de ses conséquences sur l'investissement:

1. Le niveau de productivité est constant jusqu'à la date 0 ($z_t = z$, $t < 0$),
2. il augmente à la date 0 ($z_0 = z' > z$, $t \geq 0$),
3. puis reste de façon permanente à ce niveau ($z_t = z'$, $t \geq 0$),

Conséquence sur les variables économiques:

1. Jusqu'en 0, le capital atteint sa valeur de long-terme K pour laquelle l'investissement net est nul : $I = 0$, les coûts d'ajustement sont nuls et le q de Tobin est égal à sa valeur de long-terme $q = 1 + C'(0) = 1$ si on suppose que les coûts marginaux sont nuls autour du *status quo*.
2. $z' > z$ => le capital désiré augmente avec sa productivité marginale: $K' > K$. Mais en raison de coûts convexes d'ajustement, l'entreprise étale son programme d'investissement sur plusieurs périodes => le q de Tobin s'élève: $q = 1 + C'(I_0/K_0) > 1$.
3. L'étalement de l'investissement au cours du temps réduit progressivement l'écart avec le capital désiré => le q de Tobin diminue progressivement jusqu'à revenir à sa valeur de long-terme $q = 1$ quand l'entreprise atteint son nouveau stock de capital de long-terme.

Remarque: la hausse immédiate du q de Tobin pendant la transition est le reflet de trois phénomènes reliés:

1. Accroissement de la productivité marginale du capital (q = valeur actualisée de la productivité marginale du capital),
2. accroissement des coûts marginaux d'ajustement ($q = 1 + C'(I/K)$),
3. tension entre le capital désiré (ie. sans coûts d'ajustement) et le capital effectif.

19.5 Quels sont les déterminants du capital ? Un cadre simple

Partons d'un cas avec absence de coûts d'ajustement, un seul facteur et des rendements d'échelle constants. Dans ce cas:

$$\begin{aligned} q_t &= q \text{ moyen } = 1 \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t(\pi_{t+1+i})}{K_{t+1}} \end{aligned}$$

et donc:

$$K_{t+1} = V_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i E_t(\pi_{t+1+i})$$

L'investissement et ses variations immédiates permettent de concilier deux mesures du capital: la valeur comptable et la valeur de marché.

19.6 Portée explicative du Q de Tobin

Le raisonnement de Tobin trouve un fondement dans le modèle néoclassique de l'investissement: (i) le q de Tobin est une mesure synthétique de la rentabilité du capital et (ii) l'investissement varie positivement avec la variable q. La conclusion (ii) dépend de façon cruciale de la présence de coûts d'ajustement sur le capital. Quelle est la pertinence empirique de ce modèle?

Prenons une fonction de coûts d'ajustement quadratique:

$$\begin{aligned} C(I/K) &= \frac{\alpha}{2}(I/K)^2 \\ q &= 1 + C'(I/K) = 1 + \alpha(I/K) \\ &\Rightarrow \frac{I}{K} = \frac{q-1}{\alpha} \end{aligned}$$

Nous n'observons pas directement l'investissement net de la dépréciation, mais l'investissement brut I^b:

$$\frac{I^b}{K} = \frac{I + \delta K}{K} = \frac{I}{K} + \delta$$

De même, nous n'observons pas le q marginal mais le q moyen noté Q. L'équation économétrique est donc:

$$\begin{aligned} \frac{I}{K} &= \frac{Q-1}{\alpha} - \delta \\ &= cste + \gamma Q + \varepsilon \end{aligned}$$

avec $\alpha = 1/\gamma$. Résultats de régression du taux d'investissement sur le Q moyen (Cummins, Hasset, Hubbard (1996)):

	γ	$\alpha = 1/\gamma$
E.U.	$0,048$	$20,8$
G.B.	$0,058$	$17,2$
Espagne	$0,034$	$29,4$
Japon	$0,017$	$58,8$
Italie	$0,067$	$14,9$
Allemagne	$0,032$	$31,3$
France	$0,067$	$14,9$

Les coefficients γ sont tous significatifs au seuil de 1%. Le Q de Tobin est donc bien explicatif de l'investissement.

Le coefficient γ a également un sens économique. Il mesure également la sensibilité du taux d'investissement au Q de Tobin ou inversement la taille des coûts d'ajustement. Plus γ est faible et plus la taille des coûts d'ajustement amortit les réactions de l'investissement aux variations de productivité du capital. Calculons la proportion de l'investissement net dépensé dans les coûts d'ajustement:

$$\begin{aligned}\frac{C(I,K)K}{I} &= \frac{\alpha}{2}(I/K) \\ &= \frac{1}{2\gamma}(\frac{I^b}{K} - \delta)\end{aligned}$$

Nous trouvons:

	I^b/K	δ	C/I
E.U.	$0,251$	$0,171$	$0,83$
G.B.	$0,249$	$0,125$	$1,07$
Espagne	$0,148$	$0,119$	$0,43$
Japon	$0,248$	$0,15$	$2,89$
Italie	$0,272$	$0,182$	$0,67$
Allemagne	$0,324$	$0,254$	$1,09$
France	$0,304$	$0,209$	$0,71$

Il y'a là un paradoxe pour la théorie du Q de Tobin: l'estimation des paramètres implique un coefficient de réponse excessivement faible qui se reflète dans la taille des coûts d'ajustement.

Une des réponses actuelles à ce paradoxe est de considérer que l'investissement ne réagit que faiblement aux variations courantes du Q de Tobin mais que la réaction observée est plus importantes au cours d'épisodes dans lesquels les fluctuations du Q de Tobin sont **larges** et aisément **identifiables** à des variations de productivité marginale du capital (Caballero, 2000).

Cummins, Hasset, Hubbard (1996) isolent des périodes de réformes fiscales drastiques conduisant à des variations exogènes significatives de la rentabilité marginale du capital. Par exemple, les EU ont connu une modification brutale du barème de l'impôt sur les bénéfices qui est passé de 46% en 1986 à 34% en 1988. La France est passées de 39% à 34% également en deux ans entre 1989 et 1991. Ils estiment un coefficient γ pour une dizaine de pays occidentaux mais limité à ces épisodes de variations brutales du Q:

	γ	$\alpha = 1/\gamma$	C/I
E.U.	0,65	1,5	0,0615
G.B.	0,644	1,6	0,0963
Espagne	1,485	0,7	0,0098
Japon	0,893	1,1	0,0549
Italie	0,663	1,5	0,0679
Allemagne	0,938	1,1	0,0373
France	0,756	1,3	0,0628

Les auteurs obtiennent cette fois une sensibilité plus forte de l'investissement et une amplitude des coûts d'ajustement plus raisonnable.

Quatre raisons possibles pour lesquelles le taux d'investissement ne réagit que faiblement aux variations du Q de Tobin, en dehors d'épisodes de changements brusques, exogènes et identifiables du Q:

1. La Q de Tobin est estimé par le rapport de la *valeur boursière* sur la valeur du capital installé estimé à son coût de remplacement. Si le prix des actions réagit à des phénomènes déconnectés des fondamentaux de l'entreprise (en raison de bulles spéculatives, de mimétisme des investisseurs, etc.), l'investissement ne suivra pas toutes les fluctuations boursières. Shiller (1981) montre que la volatilité du prix des actions ne peut être rationalisée par un modèle fondamentale avec anticipations rationnelles. L'excès de lissage de l'investissement est peut-être rationnel en présence d'un excès de volatilité des prix boursiers.

2. Nous avons supposé des coûts d'ajustement *variables*, fonction de la taille de l'investissement. Si une partie des coûts d'ajustement représente un *coût fixe*, il apparaît alors un intervalle d'inactivité valable pour des variations limitées du Q. Exemple: $C = C(I, K) + CF$ si $I \neq 0$. Dans cet exemple les coûts d'ajustement "sautent" entre l'inactivité totale ($I = 0$) et l'activité ($I \neq 0$) puisque $\lim C = CF$ quand $I \to 0$. Il faut alors que la productivité du capital change suffisamment pour induire une réponse de l'entreprise, c'est à dire que le Q soit sensiblement différent de l'unité.

3. Nous avons implicitement postulé un *marché financier parfait*. En réalité, l'entreprise peut manquer de sources de financement pour investir en cas de hausse du Q de Tobin. Nous étudierons cette possibilité dans la dernière section du cours.

4. Nous avons supposé que l'investissement était *réversible*: aux coûts d'ajustement près, l'entreprise peut se déséquipper et réduire son niveau d'activité d'autant. En pratique, les entreprises réduisent le taux d'utilisation des capacités productives, plus qu'ils n'éliminent une partie des surcapacités elle-même. Nous verrons dans la prochaine section pourquoi la remise en cause de l'hypothèse de réversibilité peut entraîner une déconnexion entre le Q de Tobin et l'investissement.

20 Enrichissements

Trois enrichissements:

1. L'investissement est une décision en partie irréversible (Pindyck (1991)) conduisant les entreprises à retarder leur décision d'investir en cas d'incertitude.

2. Investissement est limité par les imperfections financières

3. Le choix d'investir génère des coûts fixes de mise en place

20.1 Incertitude et irréversibilité des décisions

Le choix de capacité est une décision tournée vers le futur puisque la dépense de capacité engage l'entreprises sur de nombreuses années. Or la décision d'investir a souvent un caractère irréversible pour au moins deux raisons:

1. Absence fréquente de marchés d'occasion du capital. Le marché de l'occasion est souvent inefficace (cf. Akerlof, 1970).

2. Difficile évaluation du capital immatériel, en général non inscrit au bilan de l'entreprise. Les entreprises disposant d'un capital immatériel important (brevets, image de marque, synergies, mode d'organisation efficace) ont investi des fortes sommes qu'elles ne peuvent pas récupérer par la revente.

L'incertitude qui entoure la rentabilité future de l'investissement exacerbe les problèmes d'irréversibilité. Nous allons voir comment ces deux caractéristiques contribuent conjointement à la volatilité de l'investissement.

20.1.1 Notation et chronologie

- π_0 : profit à la date 0
- π_1 : profit à la date 1 et à *toutes* les dates suivantes, inconnu en 0
- I : montant de l'investissement, exogène, payé en une fois et irréversible

Variable de décision : la date d'investissement entre aujourd'hui ou demain.

Si l'entreprise investit aujourd'hui, elle perçoit:

$$E(\Pi_0) = -I + \pi_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(\pi_1)}{(1+r)^t}$$

Nous supposons l'absence d'usure du capital. L'investissement étant irréversible, l'entreprise est contrainte de continuer son activité et de percevoir π_1 éternellement même si le profit actualisé ne couvre pas l'investissement.

20.1.2 Profits

L'entreprise peut cependant attendre une période avant de décider, ce qui lui permet de connaître le profit qu'elle fait à partir de la date 1. Le profit intertemporel à la date 1 s'écrit, à π_1 donné:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -I + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\pi_1}{(1+r)^t} \\ &= -I + \frac{1+r}{r}\pi_1 \end{aligned}$$

L'entreprise décide d'investir si le profit est positif soit si:

$$\pi_1 \geq \frac{r}{1+r} I = \pi_1^*$$

Soit $f(.)$ la densité de π_1 et $F(.)$ sa fonction de répartition. Sachant que l'entreprise n'investit pas et obtient 0 en cas de profit intertemporel négatif, le profit espéré à la date 1 est par conséquent:

$$E_0(\Pi_1) = F\left(\pi_1^*\right).0 + \int_{\pi_1^*}^{\infty} \left[-I + \frac{1+r}{r}\pi_1\right] f(\pi_1) d\pi_1$$

A la date 0, l'entreprise préfère attendre une période si:

$$\frac{E_0(\Pi_1)}{1+r} > E_0(\Pi_0) > 0$$

Il est donc possible que l'investissement soit rentable dés aujourd'hui ($E_0(\Pi_0) > 0$) mais que l'entreprise préfère malgré tout attendre.

20.1.3 Exemple

Supposons que l'entreprise forme les anticipations suivantes de profit futur en fonction du profit éventuellement accessible dès aujourd'hui:

$$\pi_1 = \begin{cases} (1+u)\pi_0 > \pi_0 \text{ avec la probabilité } p \\ (1-d)\pi_0 < \pi_0 \text{ avec la probabilité } 1-p \end{cases}$$

L'espérance de profit intertemporel si l'entreprise investit dès la date 0 est:

$$\begin{aligned} E(\Pi_0) &= -I + \pi_0 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{p(1+u)\pi_0 + (1-p)(1-d)\pi_0}{(1+r)^t} \\ &= -I + \frac{\pi_0}{r}[r + p(1+u) + (1-p)(1-d)] \end{aligned}$$

contre :

$$E(\Pi_1) = p\left[-I + \frac{1+r}{r}(1+u)\pi_0\right] + (1-p).0$$

L'entreprise décide d'attendre si le profit intertemporel espéré à la date 1 est supérieur à celui en 0 (supposé positif):

$$\begin{aligned} \frac{E(\Pi_1)}{1+r} &= p[-\frac{1}{1+r}I + \frac{1}{r}(1+u)\pi_0] \\ > \quad & -I + \frac{\pi_0}{r}[r + p(1+u) + (1-p)(1-d)] \end{aligned}$$

soit si:

$$\frac{\pi_0}{I} < \frac{r}{r+(1-p)(1-d)} \frac{1+r-p}{1+r}$$

La décision de reporter d'une période son investissement dépend à gauche de l'équation du ratio profit courant sur investissement.

20.1.4 L'impact asymétrique des mauvaises nouvelles

Le terme de droite de l'équation précédente montre que la décision d'attendre **ne dépend pas du gain** en cas de bonne nouvelle. En effet, la taille du gain affecte la décision d'investir (via la condition $\Pi_0 > 0$), mais ne change pas la décision de reporter l'investissement, puisque si ce dernier est perçu en cas de bonne nouvelle, il est perçu quelle que soit la décision de la date d'investissement.

Cela conduit à un **impact asymétrique des nouvelles informations** ("*bad news principle*" (Bernanke, 1983):

1. La décision d'investir dépend des mauvaises nouvelles anticipées (la partie gauche de la distribution des profits), pas des bonnes nouvelles. Autrement dit, la révision des gains dans les bons états de la nature n'affecte pas la décision d'attendre contrairement à la révision de la perte dans les mauvais états de la nature.

2. Une **incertitude croissante** réduit l'investissement aujourd'hui en incitant les entreprises à l'attentisme.

Pour montrer le second point, appliquons un étalement préservant la moyenne (MPS ou "*mean preserving spread*") au profit futur:

$$\pi_1 = \begin{cases} (1+u)\pi_0 > \pi_0 \text{ avec la probabilité } 1/2 \\ (1-u)\pi_0 < \pi_0 \text{ avec la probabilité } 1/2 \end{cases}$$

L'espérance du profit est:

$$E(\pi_1) = \pi_0$$

La variance est:

$$V(\pi_1) = E[\pi_1 - \pi_0]^2 = u^2.(\pi_0)^2$$

Par conséquent, augmenter le risque de profit en augmentant la valeur du paramètre de profit u maintient la moyenne constante => MPS.

L'attente est profitable si $E(\Pi_1)/(1+r) > E(\Pi_0) > 0$. Le critère est le même en remplaçant p par $1/2$ et d par u:

$$\text{report si : } \frac{\pi_0}{I} < \frac{r}{2r+1-u}\frac{1+2r}{1+r}$$

=> la décision de reporter est d'autant plus probable que le paramètre de risque u est élevé.

Conséquences économiques de l'irréversibilité:

Une dégradation du climat économique ou une révision à la baisse des anticipations de profit (baisse de la demande, hausse des coûts, etc.) peut amener les entreprises à retarder leur calendrier d'investissement. L'investissement n'est pas nécessairement plus faible en moyenne (les périodes de surcapacités compensent en moyenne les périodes d'attentisme), mais devient plus volatile dans la mesure où l'investissement **se concentre dans le temps** (agit comme des coûts d'ajustement non convexes). Cet effet sur la volatilité est d'autant plus accentué que la demande future est variable, c'est à dire que le cycle économique est prononcé.

20.2 Le rôle des imperfections financières

Le cycle économique entraîne également un cycle d'endettement qui peut déstabiliser l'investissement agrégé. En présence de **coûts de faillite** significatifs, les entreprises doivent restreindre leur ratio d'endettement afin d'éviter le **défaut de paiement** de leur dette. Nous avons un certain nombre d'indices montrant que la survenue de récessions provoquent parfois des **crises d'endettement** qui handicapent durablement la capacité d'investissement des entreprises (Bloch & Coeure, 1995 "Imperfections du Marché du Crédit, des Entreprises et Cycle Economique" Economie et Prévision 120 (4), 161-185).

Avant de rentrer dans le détail de l'argumentation, il nous faut d'abord analyser les conditions sous lesquelles les variables financières sont sans effets sur les décisions réelles. Un cadre théorique en découle, qui est à la base de la grande majorité des modèles macroéconomiques de l'investissement depuis Jorgenson dans les années 60 jusqu'à aujourd'hui.

20.2.1 Le théorème de Modigliani-Miller (1958)

Opinion couramment admise jusqu'aux résultats théoriques de Modigliani-Miller (MM):

1. le taux d'intérêt sur la dette est inférieur au rendement des fonds propres exigés par les actionnaires. En d'autres termes:

   coût de la dette < rentabilité du capital < rendement des actions.

C'est la théorie du **levier financier**. Le surcroît de rendement des actions s'explique par le risque supérieur pris par les actionnaires;

2. d'où **l'avantage pécuniaire de la dette** comme source de fonds par rapport aux actions. En d'autres termes, le **coût de financement** de l'investissement dépend du **ratio dette sur actions**;

3. l'investissement dépend du coût de son financement;

4. des points 2. et 3., il découle que l'investissement dépend de la **structure financière** de l'entreprise.

Que penser de ce raisonnement? Il manque un cadre théorique pour réfléchir aux questions 1. et 2., d'où l'intérêt du théorème de MM.

20.2.2 Le cas sans impôt, sans faillite et avec taux d'intérêt sans risque unique

Une entreprise i génère le revenu avant tout distribution financière (EBE) $X_i(\theta)$ dans l'état $\theta = 1, ..., S$. Elle peut se financer soit par dette/obligations soit par actions.

Une entreprise i génère le revenu avant tout distribution financière (EBE) $X_i(\theta)$ dans l'état $\theta = 1, ..., S$. Elle peut se financer soit par dette/obligations soit par actions.

Valeur de l'entreprise *ex ante*: $V_i = E_i + B_i$.

Valeur de l'entreprise *ex post*: $X_i(\theta) = e_i(\theta)E_i + rB_i$ avec $e_i(\theta)$ le rendement résiduel, variable d'ajustement dans l'état θ:

$$e_i(\theta) = \frac{X_i(\theta) - rB_i}{E_i}$$

$X_i(\theta) - rB_i$ est la "créance résiduelle".

Proposition I de Modigliani-Miller. La valeur de marché V_i d'une entreprise est indépendante de sa structure financière.

Démonstration. Prenons deux entreprises strictement identiques, excepté par leur levier financier.

$$X_1(\theta) = X_2(\theta) \ \forall \ \theta = 1, ..., S$$

Pour simplifier, supposons que le levier de 1 est nul (financement "tout action"). On a donc les bilans ex ante suivants:

$$\begin{gathered} V_1 = E_1 + B_1 \\ V_2 = E_2 \end{gathered}$$

Est-ce que la valeur de marché change avec le levier, toutes choses égales par ailleurs? Pour le savoir, considérons un individu évaluant le rendement de deux stratégies:

Stratégie 1. Achète αE_2 (α: part de la valorisation boursière acquise par l'investisseur, en fonction de sa richesse ou de tout autre considération d'investissement). Rendement de la stratégie 1:

$$\frac{\alpha X_2(\theta)}{\alpha E_2} = \frac{X_2(\theta)}{E_2} = \frac{X_2(\theta)}{V_2}$$

Stratégie 2. Achète $\alpha' E_1$ et acquiert un actif sans risque d'un montant B choisi de manière adéquate:

$$B = \alpha' B_1$$

α' peut être quelconque. Seule la proportion α/α' des deux types d'actifs doit être fixée. Rendement net:

$$\frac{\alpha'[X_1(\theta) - rB_1] + r\alpha' B_1}{\alpha' E_1 + \alpha' B_1} = \frac{X_1(\theta)}{E_1 + B_1} = \frac{X_1(\theta)}{V_1}$$

Puisque les investisseurs peuvent arbitrer librement entre ces deux stratégies d'investissement, leur rendement doit être identique:

$$\frac{X_1(\theta)}{V_1} = \frac{X_2(\theta)}{V_2}$$

D'où le résultat:

$$V_1 = V_2$$

Par conséquent, la politique de levier de l'entreprise ne crée pas de risque supplémentaire pour l'investisseur si elle est compensée adéquatement par l'achat d'actifs sans risque par celui-ci. Puisque la politique strictement financière de l'entreprise (contrairement à ses choix réels évidemment) n'impose aucun risque nouveau inévitable aux investisseurs, il n'y a aucune raison que la valeur de l'entreprise varie avec celle-ci.

> Les entreprises qui utilisent le levier ne peuvent obtenir une valeur supérieure de ce seul fait car les individus qui recherchent des flux avec levier peuvent toujours les fabriquer par eux-même (*home-made leverage*). (Modigliani-Miller).

Quelle est la valeur d'une entreprise dans un tel contexte ? Dépend de considérations purement réelles: comme la somme actualisée des dividendes (théorie de la valeur fondamentale).

Le résultat de MM ne dépend pas de la théorie réelle sous-jacente, notamment des préférences pour le risque des investisseurs. **Elle dit simplement qu'un bien homogène ne peut se vendre à des prix différents**. La structure financière est simplement l'emballage. Pour la même raison, le résultat vaut pour des investisseurs hétérogènes en matière d'attitude face au risque.

Les plus risquophiles achèteront moins d'actifs sans risque, voire s'endetteront *par eux-même.*

En réalité, la structure financière de l'entreprise fait l'objet de beaucoup d'attention à la fois par les entreprises et par les investisseurs. Comment expliquer **cet écart?**

1. **Les coûts de la faillite:** frais administratifs et de justice. En France, à la suite d'un dépôt de bilan, un administrateur judiciaire est nommé par le Tribunal de Commerce et appointé par l'entreprise. Entre 1 et 10% de la valeur de l'entreprise. Probabilité de faillite moyenne = 1%. Coût moyen de faillite à retrancher de la valeur de l'entreprise: entre 0,1 et 1% de la valeur de l'entreprise.

2. Les avantages fiscaux de la dette. La dette est fiscalement avantageuse car un endettement supérieur réduit la base imposable au titre de l'impôt sur les bénéfices: $X(\theta) - rB$.

20.2.3 Dépassement du cadre de Modigliani-Miller: l'exemple des coûts de faillite

Notations:

- $f(.)$ la densité suivie par la **recette nette** X de l'entreprise, et $F(.)$ sa fonction de répartition.
- $RB = (1 + r^*)B$ la valeur faciale de la dette avec r^* le taux d'intérêt risqué, $r^* > r$, le taux sans risque.
- c les **coûts de faillite** payés lorsque la dette ne peut être remboursée intégralement : $X < RB$
- $W(R)$ la valeur *ex ante* de la dette
- $\rho(R) = W(R)/B$ le rendement *ex ante* de la dette

$$W(R) = \int_0^{RB} (X - c)f(X)dX + [1 - F(RB)]RB$$

$$\rho(R) = \int_0^{RB} \frac{(X - c)}{B} f(X)dX + [1 - F(RB)]R$$

20.2.4 Fixation du taux risqué

Condition de non arbitrage entre la dette de l'entreprise et l'actif sans risque:

$$\rho(R) = 1 + r$$

ou encore:

$$\int_0^{RB} \frac{(y-c)}{B} f(X)dX + [1-F(RB)]R = 1+r$$

ce qui fixe implicitement le taux risqué R.

20.2.5 Le rendement effectif du crédit

Le taux risqué augmente naturellement avec le taux sans risque. La hausse du taux risqué accroît le rendement de la dette $\rho(R)$ si $\rho'(R) > 0$. Toutefois, le relèvement de R augmente également la probabilité de faillite et les coûts de faillite. Dès lors, existe-t-il un plafond d'endettement ?

M**ontrons** que le rendement net peut décroître quand le taux d'intérêt augmente: $\rho'(R) < 0$. Le rendement réel attendu par la banque est:

$$\rho(R) = \int_0^{RB} \frac{(X-c)}{B} f(X)dX + [1-F(RB)]R$$

La dérivée[15] donne:

$$\begin{aligned} \rho'(R) &= \frac{(RB-c)}{B} Bf(RB) + [1-F(RB)] - Rf(RB)B \\ &= 1-F(RB)-f(RB)c \end{aligned}$$

Donc si c est petit, le rendement est une fonction toujours monotone croissante du taux risqué R. Ce n'est pas toujours le cas **si les coûts de faillite** z **sont importants**.

Prenons l'exemple d'une distribution uniforme[16] sur $\left[0, \overline{X}\right]$:

$$\begin{aligned} \rho'(R) &= \frac{\overline{X}-RB}{\overline{X}} - \frac{1}{\overline{X}}c \\ &= \frac{\overline{X}-RB-c}{\overline{X}} \end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned} \rho'(R) &> 0 \Rightarrow \overline{X}-RB > c \\ \rho'(R) &< 0 \Rightarrow \overline{X}-RB < c \end{aligned}$$

Possibilité d'une courbe en cloche dans le plan (R, ρ). La hausse du taux risqué n'accroît pas nécessairement le rendement bancaire en raison de la charge supplémentaire moyenne des coûts de faillite.

En effet, lla hausse du rendement risqué a deux effets contradictoires sur le rendement effectif:

[15] Rappel mathématique : $\frac{d}{dx}[\int_{a(x)}^{b(x)} A(x,u)f(u)du] = \int_a^b \frac{dA}{dx}(x,u)f(u)du + A(x,b)f(b)b'(x) - A(x,a)f(a)a'(x)$

[16] $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ et $f(x) = \frac{1}{b-a}$

1. un effet positif : le rendement obtenu dans les états de non faillite augmente le rendement espéré.

2. un effet négatif : l'entreprise fait plus souvent faillite en raison de la surcharge d'intérêt. Les coûts de faillite moyen augmentent, coûts que les prêteurs ne peuvent répercuter sur les emprunteurs en raison du caractère concurrentiel du marché du crédit (via la condition de non arbitrage ici).

20.2.6 Rationnement du crédit

1. Si l'entreprise souhaite financer un nouvel investissement par la dette, la banque prend en compte la dégradation de son ratio dette/actions et le risque de faillite supplémentaire engendré en augmentant la prime de risque $r^* - r$.

2. Toutefois, une entreprise déjà endettée (RB important) a une probabilité de faillite élevée. Plus grand est alors le risque que le rendement net soit en fait décroissant avec le taux risqué: $\rho'(R) < 0$ (voir la condition ci-dessus).

3. Si la banque ne peut rentrer dans ses fonds en augmentant le taux d'intérêt bancaire, elle refusera tout nouveau prêt => **rationnement du crédit**.

Conclusion : les emprunteurs trop risqués ne vont pas être servis. Il existe donc un rationnement des risques les plus élevés.

Conséquences macroéconomiques : en périodes de récession, le ratio dette sur actions a tendance à se dégrader, ainsi que le risque de faillite des entreprises => la probabilité d'une "crise de la dette" augmente, réduisant l'investissement agrégé.

20.2.7 Validation empirique

Le financement par fonds propres de l'investissement (autofinancement) n'accroît pas le risque de faillite, contrairement au financement par la dette => le premier mode de financement est donc **moins coûteux** pour l'entreprise.

Conséquence : les périodes de profits élevés et de liquidités internes abondantes devraient être favorables à l'investissement.

Les théories du cycle financier prédisent que la finance interne est moins coûteuse que la finance externe. En d'autres termes, pour un taux d'intérêt donné, les entreprises faisant plus de profits (approche par les flux) ou ayant plus de fonds propres (approche par les stocks) devraient investir plus. Dans la théorie classique de l'investissement, l'investissement optimal est fixé à l'intersection de la productivité marginale du capital et du coût du capital. En accord avec Modigliani et Miller, les fonds propres n'interviennent pas, ni les liquidités internes. Une entreprise qui a une abondance de liquidités ne devraient pas avoir plus de raisons d'investir qu'une entreprise dont la trésorerie est à sec.

Une première façon de tester cette théorie est de régresser l'investissement sur le q de Tobin et les profits courants (les *cash flows* CF):

$$\frac{I_{it}}{K_{it}} = \alpha_i + \beta \frac{V_{it}}{K_{it}} + \gamma \frac{CF_{it}}{K_{it}} + \varepsilon_{it}$$

Le q de Tobin est approximé ici par le q moyen (Hayashi, 1982), c'est à dire le ratio de la capitalisation boursière sur le stock de capital. Il synthétise toute l'information pertinente sur la productivité marginale de l'investissement et le coût du capital. En comptabilité française, les cash flows correspondent à l'excédent brut d'exploitation, moins les frais financiers, c'est à dire l'ensemble des liquidités dégagées par l'entreprise, déduction faite des charges salariales et des charges d'intérêts.

L'estimation de ce modèle est réalisée pour la France sur l'échantillon de groupes français cotés sur la période 1994-2000 (Thesmar, 2005). La valeur boursière de l'entreprise est la somme de sa capitalisation boursière et de l'encours comptable de sa dette (somme de la valeur de toutes ses dettes). Résultats économétriques pour trois pays:

médianes	EU	Japon	France
β	1,11	1,08	1,14
γ	0,23	0,25	0,28

sources: voir Thesmar, 2005, p.42

Les résultats sont conformes à l'existence de contraintes de financement, puisque quelle que soit la spécification, les liquidités disponibles sont significativement corrélées à l'investissement. Les résultats trouvés dépendent cependant de la capacité réelle du q de Tobin à capter l'ensemble des facteurs de variation de l'investissement. Les travaux empiriques montrent que si le coefficient devant le q de Tobin est bien significatif, sa valeur implique des coûts d'ajustement beaucoup trop larges. Sans faire appel à une interprétation en terme de contraintes financières, il est facile de comprendre que le profit actuel (les *cash flows*) est un bon prédicteur des profits futurs en raison de la persistance temporelle de la performance d'une entreprise. Le profit actuel peut donc être un signal de profitabilité future auquel répondra l'entreprise par un investissement supplémentaire. Si le q de Tobin ne capte pas entièrement la relation, les profits seront une variable explicative de l'investissement, mais le canal financier ne sera pas pour autant prouvé.

Fazzari, Hubbard et Petersen (1988) proposent de résoudre ce problème d'identification en étudiant le comportement d'investissement de deux groupes d'entreprises dont l'un est supposé plus contraint financièrement que l'autre. La théorie des contraintes financières prédit que le groupe contraint devrait exhiber une sensibilité de l'investissement aux profits plus fortes. Les auteurs séparent les entreprises en fonction de leu politique de dividendes. Les entreprises qui paient beaucoup de dividendes peuvent plus facilement financer leur investissement par foinancement interne. Les entreprises qui ne paient pas de dividendes doivent généralement faire appel à l'épargne extérieure. Le même exercice est refait séparément pour les deux groupes. Le coefficient du *cash flow* pour les entreprises à haut dividendes est de 0,230 (écart-type de 0,010), celui des entreprises à faible dividende est de 0,461 (écart-type de 0,027). Le test d'égalité des coefficients est fortement rejeté, validant l'intuition de départ. La manière de séparer les entreprises en deux groupes sur la bas des dividendes a cependant été critiqués par Kaplan et Zingales (1997).

Lamont (1993) compare le comportement d'investissement de filiales de grands groupes pétroliers après la chute des cours du pétrole de 1986. La baisse des profits qui a suivi a eu un impact négatif sur l'investissement des entreprises pétrolières mais aussi sur l'investissement de leur filiales, y compris celles dont le métier n'était pas relié à l'activité pétrolière de leur maison mère. Le test permet de déconnecter la variation des profits de celle de la rentabilité du capital. Lamont estime que la baisse d'un dollar de profit de la compagnie a réduit l'investissement des filiales non pétrolières de 10 cents.

Gertler et Gilchrist (1994) comparent le comportement de stocks des petites et moyennes entreprises et celui des grandes entreprises à la suite d'une restriction de la politique monétaire. Ils trouvent que les stocks des PME se contractent plus fortement à la suite d'un choc monétaire négatif. Cette catégorie d'entreprises a généralement un coût des fonds propres externes supérieurs.

21 Coûts fixes

Comment l'introduction de coûts fixes affecte le q de Tobin? Nous montrons que le q de Tobin peut varier sans que l'investissement ne change. De plus, il existe des cas où le q de Tobin peut décroître alors que la profitabilité de l'investissement augmentent[17].

Partons d'un modèle familier à deux périodes, dans un premier temps sans coûts fixes et avec coûts variables convexes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -I - C(\frac{I}{K_0})K_0 + \frac{1}{1+r}z_1 F(K_1) + q(K_0 + I - K_1) \\ & \quad K_0 \text{ donné}\end{aligned}$$

Cela revient à supposer l'absence de dépréciation entre la période 0 et la période 1, puis une dépréciation complète du capital entre la période 1 et la période 2.

CPO sur l'investissement:

$$q = 1 + C'(\frac{I}{K_0})$$

CPO sur le stock:

$$q = \frac{1}{1+r}z_1 F'(K_1)$$

[17]exemple inspiré de Caballero Leahy (1996) "Fixed costs: the demise of marginal q", Nber N° 5508.

Nous voyons que le q de Tobin est simplement la productivité marginale du capital. Le stock optimal égalise la productivité marginale du capital à son coût marginal:

$$\frac{1}{1+r} z_1 F'(K_1) = 1 + C'(\frac{I}{K_0})$$

Cette condition d'optimalité est à comparer avec celle obtenue dans le modèle avec horizon infini dans lequel le choix d'accroître d'une unité le capital aujourd'hui augmente durablement le stock de capital et affecte par conséquent les profits futurs.

21.1 Modèle sans coûts variables

Sans coûts variables, nous savons que l'investissement réagit de telle manière à égaliser le q marginal à 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -I + \frac{1}{1+r} z_1 F(K_1) + q(K_0 + I - K_1) \\ & K_0 \text{ donné} \end{aligned}$$

CPO sur l'investissement et le stock de capital:

$$q = 1 = \frac{1}{1+r} z_1 F'(K_1)$$

Nous obtenons finalement la condition familière d'égalité de la productivité marginale du facteur à son coût:

$$z_1 F'(K_1) = 1 + r$$

21.2 Modèle avec coûts fixes

L'absence de coûts variables d'ajustement implique que l'on peut raisonner directement sur les stocks. L'entreprise a le choix entre investir ou ne pas investir, et si elle investit, de combien.

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \begin{array}{c} \max\limits_{K_1} - (K_1 - K_0) + \frac{1}{1+r} z_1 F(K_1) - F; \\ \frac{1}{1+r} z_1 F(K_0) \end{array} \right\} \\ &K_0 \text{ donné} \end{aligned}$$

Si l'entreprise investit, elle fixe K_1 tel que:

$$\frac{1}{1+r} z_1 F'(K_1) = 1$$

Si l'entreprise décide de ne pas investir: $K_1 = K_0$ malgré le fait que:

$$\frac{1}{1+r} z_1 F'(K_0) > 1$$

en raison du coût fixe.

Définissons le q marginal comme la valeur d'une unité supplémentaire de capital:

$$q = \frac{1}{1+r} z_1 F'(K_0) > 1$$

Par conséquent, le q marginal peut varier même en l'absence de coûts d'ajustement convexes. De plus, il peut augmenter, sans que l'investissement ne réagisse => explique pourquoi l'investissement est peu sensible économétriquement au q de Tobin pour de faibles variations de celui-ci.

D'autre part, le q moyen n'est plus nécessairement une bonne approximation du q marginal, lequel n'incorpore pas le coût fixe contrairement au q moyen.

21.3 Modèles à 3 périodes

Ajoutons une période avec la productivité $\widetilde{z}_2 = \widetilde{\theta} z_1$ et $E\widetilde{\theta} = 1$ qui est aléatoire en 0 mais connue en 1.

Il est facile de voir qu'il existe un seuil $\overline{\theta} = z_2/z_1$ tel que au delà de ce seuil, l'entreprise investit à la seconde période. Elle choisit alors K_2 tel que:

$$\frac{1}{1+r} z_2 F'(K_2) = 1$$

Quel impact sur le q de Tobin à la date 0? Partons d'une situation où l'entreprise n'investit pas à la première période. $P(\widetilde{\theta} < \overline{\theta})$ est la probabilité que l'entreprise n'ajuste pas son stock de capital en seconde période.

$$q = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{1+r} z_1 F'(K_1) \\ +P(\widetilde{\theta} < \overline{\theta}) E_0 \left[\frac{1}{(1+r)^2} \widetilde{z}_2 F'(K_1) | \widetilde{\theta} < \overline{\theta} \right] \\ +P(\widetilde{\theta} \geq \overline{\theta}) \times \underbrace{E_0 \left[\frac{1}{(1+r)^2} \widetilde{z}_2 F'(K_2) | \widetilde{\theta} \geq \overline{\theta} \right]}_{=1} \end{array} \right.$$

Maintenant, supposons que z_1 augmente en première période, dans une zone où l'investissement est nul à la date 0. Cela a trois effets sur le q marginal:

- la productivité du capital augmente en 0
- la profitabilité augmente à la date 1 (l'espérance conditionnelle en 0)
- la probabilité $P(\widetilde{\theta} < \overline{\theta})$ de ne pas s'ajuster diminue

Ce dernier terme introduit la possibilité que le q de Tobin évolue en sens inverse avec la profitabilité de l'investissement. Cabalero et Leahy (1996) montrent un tel cas. Quand z_1 est faible, la probabilité de ne pas s'ajuster est peu sensible à z_1. Dans ce cas, le q marginal est bien croissant avec z_1 et l'investissement. Au fur et à mesure que z_1 est élevée, la relation peut s'inverser: l'investissement peut croître alors que le q marginal décroît.

Remarquons toutefois que ce problème de non-linéarité est moins problématique si le q marginal est approximé par le q moyen:

$$Q = \frac{\max E_0 \Pi(K_1, K_2 | z_1, z_2)}{K_0}$$

Il est clair que le profit actualisé aux deux dates ne peut pas décroître quand la productivité augmente. Le Q moyen est donc bien toujours croissant avec l'investissement.

22 Equilibre général

Les ménages décident de combien ils consomment, et les entreprises de combien elles investissent. Les ménages contrôlent les entreprises mais ne sont plus neutres face au risque comme cela était supposé quand nous avons étudié l'investissement[18]. Nous montrons que l'analyse du q de Tobin peut se généraliser en équilibre général.

Nous utilisons le second théorème du Bien-Etre en l'absence d'imperfections de marché: tout optimum de Pareto est atteignable en situation de concurrence pure est parfaite moyennant une distribution adéquate des dotations initiales.

22.1 Programme en économie fermée

$$\left\{ \begin{array}{c} \max E_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(C_{t+i}) \right] \\ C_{t+i} = Z_t F(K_t, N_t) - I_t - a \frac{I_t^2}{K_t} \\ K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t \\ N_t = 1 \end{array} \right.$$

Les rendements d'échelle restent globalement constants:

$$Z_t F(\theta K_t, \theta N_t) - \theta I_t - a \frac{(\theta I_t)^2}{\theta K_t} = \theta \left(Z_t F(K_t, 1) - I_t - a \frac{I_t^2}{K_t} \right)$$

22.2 Le cas d'une petite économie ouverte

Dans une petite économie ouverte, le pays ne contrôle pas le taux d'intérêt mondial.

[18] Ce passage est tiré de Blanchard (2003) "Allowing for non trivial investment decisions", notes de cours, MIT.

$$\left\{\begin{array}{c} \max E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i U(C_{t+i})\right] \\ A_{t+1} = C_t - Z_t F(K_t,1) - I_t - a\frac{I_t^2}{K_t} + R_t A_t \\ K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \end{array}\right.$$

Deux moyens d'épargner pour une économie ouverte: le capital, les échanges de capitaux avec le reste du monde.

Notons $\beta^i\lambda_{t+i}$ et $\beta^i\mu_{t+i}$ les multiplicateurs associés aux deux contraintes. CPO:

$$\left\{\begin{array}{rl} C_t: & U'(C_t) = \lambda_t \\ A_{t+1}: & \lambda_t = E_t\left[\beta R_{t+1}\lambda_{t+1}\right] \end{array}\right.$$

- L'utilité marginale de la consommation est égale à l'utilité marginale de la richesse.
- L'utilité marginale de la richesse est égalisée d'une période à l'autre. Les deux fournissent la condition d'Euler habituelle:

$$U'(C_t) = E_t\left[\beta R_{t+1} U'(C_{t+1})\right]$$

CPO sur l'investissement et le capital respectivement:

$$\lambda_t(1 + 2a\frac{I_t}{K_t}) = \mu_t$$

$$\mu_t = \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\left(Z_{t+1}F_K(K_{t+1},1) + a(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})^2\right) + (1-\delta)\mu_{t+1}\right]$$

- Le coût marginal d'investir $1 + 2a\frac{I_t}{K_t}$ en termes de biens multiplié par l'utilité marginale de la consommation λ_t doit être égale à la valeur marginale du capital installé μ_t.
- Plus de capital aujourd'hui permet de produire et de consommer plus demain et de conserver la partie non dépréciée du capital installé pour un usage aux périodes futures. De façon cohérente, la valeur marginale du capital installé aujourd'hui doit être égale à la productivité marginale du capital la période suivante fois l'utilité marginale de la consommation la période suivante, plus la valeur marginale du capital installé demain non dépréciée.

Définissons une nouvelle variable:

$$q_t \equiv \frac{\mu_t}{\lambda_t}$$

q_t peut s'interpréter comme l'utilité marginale du capital en termes de biens. Les deux CPO se réécrivent:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{2a}(q_t - 1)$$

$$q_t = E_t \left[(R_{t+1})^{-1} \left(Z_{t+1} F_K(K_{t+1}, 1) + a(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}})^2 + (1-\delta) q_{t+1} \right) \right]$$

La deuxième relation utilise la condition précédente:

$$E_t \left[\beta R_{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \right] = 1$$

Nous nous retrouvons avec deux équations bien connues:

- L'équation d'investissement qui dépend du q marginal. Si $q = 1$, le taux d'investissement optimal est égal à 0: la valeur marginale du capital est juste égale aux coûts d'ajustement de l'investissement nécessaires pour faire varier le stock de capital.

- L'équation de q marginal pour l'investissement dans laquelle la valeur marginale du capital aujourd'hui (à sa valeur de marché) est égale au rendement du capital de la période suivante plus la valeur marginale du capital de demain. Si la productivité marginale future du capitale est élevée, le q marginal est élevé et le taux d'investissement est positif.

22.3 Références bibliographiques

22.3.1 Références sur la consommation:

Understanding Consumption par Angus Deaton, Clarendon Lectures in Economics, Oxford University Press 1992 (côte bibliothèque Ibanes 330.115 DEA)

Attanasio, Orazio P. "Consumption Demand." In Handbook of Macroeconomics. Edited by John B. Taylor and Michael Woodford. Amsterdam: North-Holland, 1999. Vol. 1B, chap. 11.

The OECD Statistics Brief N. 8, June 2004 - Comparison of Household Saving Ratios: Euro area/United States/Japan (faits)

Christian Gollier (septembre 2004) "The Economics Of Risk And Time", MIT Press.

Pratt John W. (1964) "Risk Aversion in the Small and in the Large" Econometrica, Vol. 32, No. 1/2.

Kimball, Miles S. (1990) "Precautionary Saving in the Small and in the Large." Econometrica 58, no. 1: 53-73.

Eeckhoudt L. & H. Schlesinger (2003) "Putting Risk in its Proper Place" mimeo.

Robert E. Hall (1978) "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence" The Journal of Political Economy, Vol. 86, No. 6., pp. 971-987.

Flavin, Marjorie. "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations of about Future Income." Journal of Political Economy 89, no. 5 (October 1981): 974-1009.

Scholz John Karl, Seshadri Ananth & Surachai Khitatrakun "Are Americans saving "optimally" for retirement ?" NBER n°10260.

Gourinchas, Pierre Olivier, and Jonathan Parker. "Consumption over the Life Cycle." Econometrica 70, no. 1 (January 2002): 47-91 .

Palumbo Michael G. (1999) "Uncertain Medical Expenses and Precautionary Saving Near the End of the Life Cycle" The Review of Economic Studies, Vol. 66, No. 2. pp. 395-421.

Carroll, Christopher. "A Theory of the Consumption Function, with and without Borrowing Constraints (expanded version)." NBER Working Paper No. w8387.

22.3.2 Références sur les marchés financiers:

Asset Pricing, John H. Cochrane, Princeton University Press 2001.

Irrational Exuberance, Shiller, R., Princeton University Press, 2000.

Cochrane, John H., and Lars Peter Hansen. "Asset Pricing Explorations for Macroeconomics." NBER Working Paper N° 4088.

Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends? Robert J. Shiller, The American Economic Review, Vol. 71, No. 3. (Jun., 1981), pp. 421-436.

Efficient Capital Markets and Martingales, Stephen F. LeRoy, Journal of Economic Literature, Vol. 27, No. 4. (Dec., 1989), pp. 1583-1621.

Mehra, Rajnish, and Edward C. Prescott. "The Equity Premium: A Puzzle." Journal of Monetary Economics 15, no. 2 (1985): 145-162.

Kocherlakota, Narayana R. "The Equity Premium Puzzle: It's Still a Puzzle." Journal of Economic Literature 34, no. 1 (1996): 42-71.

Boldrin, Christiano, Fisher (2001) "Habit Persistence, Asset Returns, and the Business Cycle" The American Economic Review, Vol. 91, No. 1. (Mar., 2001), pp. 149-166.

22.3.3 Références sur l'investissement:

Caballero, Ricardo J. "Aggregate Investment." In Handbook of Macroeconomics. Edited by John B. Taylor and Michael Woodford. Amsterdam: North-Holland, 1999. Vol. 1B, chap. 12.

Investment under uncertainty par Avinash K. Dixit et Robert S. Pindyck, Princeton University Press 1994 (côte bibliothèque Ibanes 334.31 DIX).

Cummins, Hasset & Hubbard (1995) "Tax Reforms and Investment : A Cross-country Comparison", NBER 5232.

Robert S. Pindyck "Irreversibility, Uncertainty, and Investment", Journal of Economic Literature, Vol. 29, No. 3. (Sep., 1991), pp. 1110-1148.

Doms M. & T. Dunne (1998) "Capital Adjustment Patterns in Manufacturing Plants" Review of Economic Dynamics 1, 409-429.

Hayashi, Fumio. "Tobin's Marginal q and Average q: A Neo-Classical Interpretation." Econometrica 50, no. 1 (January 1982): 213-224.

Caballero R. J. (1997) "Aggregate Investment" NBER Working Paper 6264.

Chirinko R. (1993) "Business Fixed Investment Spending: Modeling Strategies, Empirical Results; and Policy Implications. Journal of Economic Literature 31 1875-1911.

Hasset K. A., Hubbard R. G. (1996) "Tax Policy and Investment" NBER Working paper 5683.

Bloch & Coeure (1995) "Imperfections du Marché du Crédit, des Entreprises et Cycle Economique" Economie et Prévision 120 (4), 161-185.

Fazzari S., Hubbard G., Petersen B. (1988) "Financing Constraints and Corporate Investment" Brookings Papers on Economic Activity 1, 142-206.

Summers L. H. (1981) "Taxation and Corporate Investment : A Q-theory Approach" Brookings Papers on Economic Activity 1 67-127.

Pindyck R. S. (1991) Irreversibility, Uncertainty and Investment" Journal of Economic Literature 29 (3) 1110-48.

Abel A. B., Eberly J. C. (1994) "A Unified Model of Investment Under Uncertainty" American Economic Review 84 1369-84.

Thomas, Julia K. "Is Lumpy Investment Relevant for the Business Cycle?" Journal of Political Economy 110, no. 3 (June 2002): 509-534.

The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, Franco Modigliani, Merton H. Miller, The American Economic Review, Vol. 48, No. 3. (Jun., 1958), pp. 261-297.